

# ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИЕМА СИГНАЛОВ В ПОМЕХАХ

## ВВЕДЕНИЕ

Теория статистических решений рассматривает такие ситуации, когда необходимо принять решение в условиях большей или меньшей неопределенности.

Под термином «статистическое решение» понимается решение, принимаемое по наблюдению случайной величины, совокупности их или реализаций случайного процесса и на основании априорных статистических данных. Оценка качества правила принятия решения и отыскивание наилучших правил – основные задачи теории решений.

В данном учебном пособии теория статистических решений изучается применительно к проблеме приема и обработки сообщений. Сущность этой проблемы может быть охарактеризована на примере структурной схемы системы передачи сообщений, изображенной на рис. 1.



Рис. 1. Структурная схема системы передачи сообщений

Источник сообщений вырабатывает сигналы, несущие полезную информацию. Модель такого источника обычно представляется в виде множества его возможных сообщений. Вероятность выработки любого сообщения этого множества известна. Таким образом, процедура создания сигнала сводится к случайному выбору элемента из некоторого ансамбля. Преобразователь сигнал – сообщение и передающее устройство производят операции для обеспечения наиболее экономичной и помехоустойчивой передачи информации по каналу связи. Канал связи осуществляет передачу сигналов от передающего устройства к приемному. При этом сигнал подвергается случайным искажениям, что и отражено в структурной схеме системы отдельным источником помех.

Источник помех – это генератор, имитирующий все случайные искажения, которым подвергается сигнал в процессе передачи. Помеха может быть как аддитивной, так и мультипликативной. Приемное устройство производит предварительную обработку входного сигнала, являющегося смесью передаваемого сигнала и помехи. В дальнейшем будем считать, что оно является частью решающего устройства.

Решающее устройство анализирует воздействие  $y$  и принимает решение о том, какое из возможных сообщений источника имеет место. Структурной схеме системы передачи сообщений соответствует математическая модель, изображенная на рис. 2. Здесь источник сообщений вместе с преобразователем и передающим устройством представлены некоторым множеством  $\{S\}$  – «пространством сигналов источника». Элементы пространства, условно изображаемые точками, – это возможные сигналы, поступающие на вход канала. Выбор того или иного элемента из множества управляется априорными (т. е. заранее известными) вероятностями  $P\{S_i\}$ , характерными для данного источника.

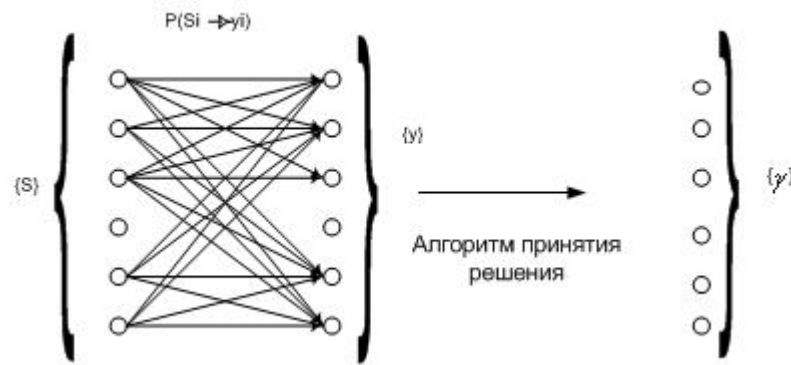


Рис. 2. Модель канала передачи сообщений

Множество  $\{y\}$  – «пространство наблюдений» – это все возможные сигналы на выходе канала. Множество  $\{y\}$  определяется всеми возможными передаваемыми сигналами  $\{S\}$  с учетом всех возможных искажений, вносимых помехами. Стрелочки с указанными около них вероятностями «переходов»  $P(S_i \rightarrow y_j)$ , связывающие пространство сигналов источника с пространством наблюдений, отображают неоднозначный, статистический характер передачи сигналов в условиях помех.

Один и тот же сигнал  $y_j$  может наблюдаться и тогда, когда посланный сигнал есть  $S_i$ , и тогда, когда послан другой сигнал  $S_k$ . Так, например, сигнал на выходе канала, равный  $y_j = 10B$ , может появиться при передаче сигнала  $S_i = 8B$ , если воздействующая помеха случайно увеличит его на  $2B$ , но тот же сигнал  $y_j = 10B$  может наблюдаться и при передаче  $S_k = 15B$ , если помеха уменьшит передаваемый сигнал на  $5B$ . Вероятности переходов  $P(S_i \rightarrow y_j)$  или, что то же, условные вероятности  $P(y_j / S_i)$  появления наблюдаемого сигнала  $y_j$  в условиях, когда передавался сигнал  $S_i$ , определяются характером воздействия помехи – аддитивным или мультипликативным и ее статистикой.

Получив некоторый сигнал  $y_j$ , «наблюдатель» (или что то же, решающее устройство) должен принять решение  $\gamma_k$ , одно из множества возможных решений  $\{\gamma\}$ , соответствующих множеству возможных сигналов источника  $\{S\}$ . Алгоритм, или правило принятия решения, устанавливает соответствие между точками пространства наблюдений и точками пространства решений.

В общем виде алгоритм принятия решения – это комплекс математических и (или) логических операций, которым следует подвергнуть наблюдаемый сигнал. Другими словами, некоторая программа действий, входными данными которой является наблюдаемый сигнал (или его составляющие), а выходом – логическая функция принятия решения. Алгоритм принятия решения основывается на тех или иных признаках, содержащихся в наблюдаемом сигнале и свидетельствующих о передаваемом сигнале. В общем случае наблюдаемые сигналы – некоторые функции времени, и существуют множество разных признаков, которые могут быть положены в основу того или иного алгоритма. Например, один из алгоритмов может основываться на наблюдении пикового значения сигнала, другой – на определении его площади, третий на подсчете числа пересечений нулевого уровня и т. д.

Одна из основных задач теории – отыскание оптимального, наилучшего алгоритма. Но что значит наилучший?

Модель, представленная на рис. 2, иллюстрирует основную особенность поставленной задачи: то состояние неопределенности, неуверенности, в которое поставлен наблюдатель. Наблюдателю предъявляется один из сигналов, пусть например  $y_k$ . Судя по диаграмме переходов, этот сигнал мог быть вызван и передачей  $S_i$  и передачей  $S_j$ . Ни одна из этих возможностей не исключена, поэтому какое бы решение ни принимал наблюдатель, оно может оказаться ошибочным. Поиск наилучшего наблюдателя, который бы не совершал ошибок, бессмыслен. Речь может идти лишь о том, чтобы ошибочные решения наблюдателя были по возможности редки, а их последствия по возможности менее опасны. Точное математическое описание этих качественных понятий будет дано ниже, при введении статистических критериев качества алгоритма принятия решения.

В дальнейшем доказывается, что наблюдатель, оптимальный с точки зрения статистических критериев, должен основывать свой алгоритм на анализе статистических характеристик, действующих в пространстве наблюдений  $\{y\}$  и связанных с предположением (гипотезой) о передаче того или иного

сигнала из  $\{S\}$ . Поэтому часто задачу о принятии решений в условиях неопределенности формулируют как задачу проверки гипотез.

В нашем примере наблюдатель, получив некоторый  $y_k$ , делает сначала первое предположение: «Что, если передавался сигнал  $S_i$ ? Как совместимы мои наблюдения с этой гипотезой?» И отвечает: «Если передавался  $S_i$ , то я мог бы наблюдать  $y_k$  и условная вероятность такого наблюдения была бы  $P(y_j / S_k)$ ». Затем следует вторая гипотеза: «Что, если передавался сигнал  $S_j$ ?». Ответ: «В этом случае я тоже мог бы получить этот же самый сигнал  $y_k$ , но вероятность уже другая:  $P(y / S_i)$ ».

Итак, каждая гипотеза влечет за собой соответствующую условную вероятность получить тот сигнал, который действительно предъявлен наблюдателю.

Поскольку эти рассуждения можно провести при наблюдении любого из сигналов  $\{y\}$ , то можно сказать, что гипотеза о передаче  $S_i$  однозначно влечет за собой предположение о том, что на множестве  $\{y\}$  действует условное распределение  $P(y / S_j)$ , а гипотеза о передаче  $S_j$  – другое распределение  $P(y / S_j)$ . В этом и состоит смысл следующего краткого определения: статистической гипотезой называется гипотеза о законе распределения вероятностей, действующем в пространстве наблюдений. Такое определение включает рассматриваемый пример передачи  $S_i$  и приема  $y_k$ , как частный случай.

Если множество  $\{y\}$  континуально, так что нельзя перенумеровать его всевозможные сигналы, то вместо распределений вероятностей будем иметь дело с условными плотностями  $W(y / S_i)$ .

В дальнейшем гипотезы будут обозначаться символом  $H$  с индексом, указывающим номер передаваемого сигнала. Условные плотности, соответствующие гипотезам, будут записываться в виде  $W(y / H_i)$ .

**Пример.** Пусть возможные сигналы из множества  $\{S\}$  – некоторые заранее заданные напряжения  $S_1, S_2$ . Пусть искажающий аддитивный шум в канале – гауссов с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ , так что плотность вероятностей значений помехи  $\xi$  имеет вид

$$W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$$

Условная плотность вероятности получить некоторый сигнал  $y$  при гипотезе  $H_1$  равна плотности вероятности появления помехи, дополняющей  $S_1$  до  $y$ :

$$W(y / H_1) = W(\xi = y - S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-S_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Аналогичное распределение при гипотезе  $H_2$

$$W(y / H_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-S_2)^2}{2\sigma^2}}$$

Можно сказать, что проверке подлежат гипотезы о том, какое из двух распределений действует на множестве  $\{y\}$ .

В рассмотренном примере передаваемые сигналы  $S_1, S_2$  и наблюдаемые сигналы  $\{y\}$  были заданы как некоторые числовые значения напряжений.

В общем случае все сигналы являются некоторыми функциями времени:  $S_1(t), y(t), S_2(t)$ . При этом вместо условных плотностей появляются условные функционалы вида  $W[y(t) / H_i]$ . Для облегчения анализа можно вместо функций времени рассматривать запись сигнала в виде некоторой совокупности отсчетов, называемой выборкой,

$$S_i(t) = (S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, \dots, S_{in}),$$

Где  $n$  – объем выборки.

Тогда условные функционалы переходят вновь в условные плотности, но многомерные  $W[y_1 y_2 \dots y_n / H_i]$ .

Представление функций времени – передаваемых и принимаемых сигналов – совокупностями их отсчетов дает возможность вводить геометрическую интерпретацию пространства сигналов источника

и пространства наблюдений. Вводя метрику пространства, т. е. определяя понятие расстояния между сигналами, можно говорить о геометрической конфигурации пространства, «объеме» его областей и т. д. Задача выбора решающего правила представляется как геометрическая задача разбиения пространства на области.

Такая интерпретация обладает достоинством определенной наглядности, а в ряде случаев способствует и проведению выкладок, привлекая хорошо разработанный аппарат аналитической геометрии.

Рассмотрим структуру пространства сигналов, отождествляя сигналы  $S(t)$  с точками пространства, а вероятности (плотности вероятностей) с «массой» («плотности») точек в пространстве. Детерминированный сигнал  $S_i(t)$  изображается вполне определенной точкой, декартовы координаты которой задаются его отсчетами  $(S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{in})$ . Будем говорить также о векторе сигнала  $\bar{S}_i$ , рассматривая отсчеты как проекции вектора на координатные оси.

Если сигнал задан как некоторое значение напряжения  $S_i$ , то ему естественно сопоставляется точка числовой оси (рис. 3, а). Сигналу, заданному двумя отсчетами  $\bar{S}_i = (S_{i1}, S_{i2})$ , сопоставляется точка на плоскости (рис. 3 б); тремя отсчетами – точка в трехмерном пространстве (рис. 3 в). Подобно этому сигнал, задаваемый  $n$  отсчетами, представляется точкой в абстрактном  $n$ -мерном пространстве (рис. 3, е).

Геометрическое представление случайных функций времени несколько сложнее. Случайному сигналу  $\xi(t)$  не соответствует какая-либо одна точка пространства. Ему сопоставляется область возможных расположений точек, причем «плотность» возможного расположения в разных точках в общем случае различна. Наиболее плотно располагаются точки в том районе, где максимальна плотность вероятности случайной многомерной выборки  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Так, например, если  $\xi(t)$  – гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием, то соответствующие точки наиболее плотно размещены в начале координат с постепенным уменьшением плотности к периферии.

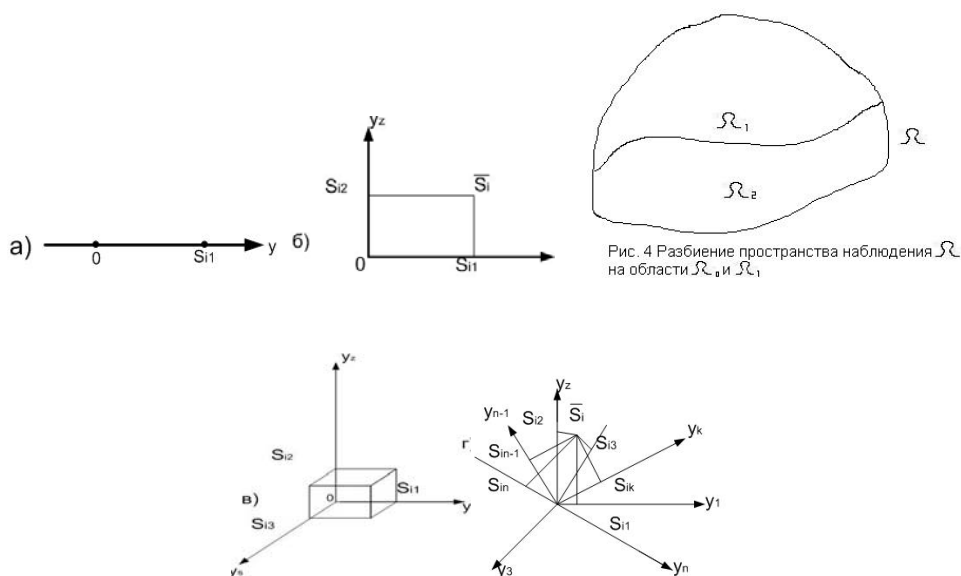


Рис. 3. Пространство сигналов:

а - одномерное; б - двумерное; в - трехмерное; г - n-мерное

Рассмотрим геометрический образ пространства наблюдений  $\{\bar{y}\}$  при передаче одного из детерминированных сигналов  $\{\bar{S}_i\}$  и воздействии на него шумовой помехи  $\{\bar{\xi}(t)\}$ . Случайный вектор  $\bar{y} = \bar{S}_i + \bar{\xi}$  имеет математическое ожидание  $\bar{S}_i$ . Это значит, что в пространстве наблюдений область наиболее плотного расположения точек  $\{\bar{y}\}$  имеется вокруг  $\bar{S}_i$ . При передаче другого сигнала  $S_j$  область наиболее плотного расположения смещается в иную точку. Поскольку передаваемые сигналы заранее известны, можно выделить в пространстве области, где будут располагаться «сгущения» точек наблюдаемых сигналов при передаче того или иного сигнала. Обозначим эти области через  $\Omega$ , а все пространство наблюдений – через  $\Omega$  (рис. 4).

Алгоритм принятия решения по наблюдаемому сигналу можно теперь трактовать так: в пространстве  $\Omega$  заранее выделены области  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  по числу возможных передаваемых сигналов. Если наблюдается появление точки  $\bar{y}$ , попадающей в область  $\Omega_i$ , то принимается решение  $\gamma_i$ .

Поскольку, в соответствии с постановкой обсуждаемой задачи, наблюдатель должен обязательно принять одно из решений  $\{\gamma\}$ , выбор областей, оставляющий «свободные» точки, недопустим. Действительно, какое решение примет наблюдатель, если точка попадет между областями? На этот счет в предложенном алгоритме нет никаких указаний. Следовательно, выделять области  $\Omega_i$  нужно так, чтобы не оставалось «ничейного» пространства: пространство  $\Omega$  должно быть разбито на области  $\Omega_i$  так, чтобы

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n = \Omega$$

задача поиска оптимального алгоритма принятия решения теперь представляется нам как задача оптимального проведения границ, разделяющих области  $\Omega_i$  между собой.

Следует отметить, что постановка задачи, в которой наблюдатель по предъявленному ему сигналу  $y(t)$  должен однозначно принимать определенное решение  $\gamma$ , не является единственно возможной. Существуют и другие. Например, наблюдателю может быть разрешено отказаться от решения. В этом случае области  $\Omega_i$  могут и не соприкасаться, остаются части пространства, соответствующие ответу «не знаю».

Есть еще одна постановка задачи, в которой наблюдателю разрешается «гадать». По полученному такому-то сигналу  $y_k$  наблюдатель не обязательно принимает решение  $\gamma_i$ . Получив  $y_k$ , наблюдатель может использовать некоторый механизм, который случайно выберет одно решение из  $\{\gamma\}$ . Наблюдаемый сигнал определяет лишь вероятности, с которыми будет производиться выбор решения. Это так называемый рандомизированный, случайный алгоритм (или рандомизированное решающее правило). При рандомизированных алгоритмах нельзя указать в пространстве  $\Omega$  каких-либо определенных границ между областями  $\Omega_i$ .

В настоящем пособии рассматривается лишь нерандомизированные (неслучайные) алгоритмы, поэтому представление о разбиении пространства  $\Omega$  на области  $\Omega_i$  будет широко использоваться.

Заканчивая вводные пояснения, следует еще раз обратить внимание на то, что поиск оптимального алгоритма, или поиск оптимальных границ  $\Omega_i$ , невозможен, пока не формализовано само понятие оптимальности, сам критерий качества алгоритма. Разные критерии приводят к различным алгоритмам. Отыскание алгоритма, оптимального по тому или иному критерию, является важной задачей, но не окончательной, и тем более не самоцелью. Найденный алгоритм покажет, какие операции над принятым сигналом  $y(t)$  следовало бы проделать. Встает вопрос: «а как их осуществить? Как практически обрабатывать принимаемые электрические колебания?» На этом этапе очень часто приходится отказываться от выполнения точных предписаний оптимального алгоритма, заменяя их приближенными. Получается «подоптимальный», или «субоптимальный» метод обработки сигналов, принципиально проигрывающий оптимальному, но зато более простой в практическом воплощении.

## РАЗЛИЧЕНИЕ ДВУХ СИГНАЛОВ

В главе рассматриваются наиболее распространенные критерии качества решения при различении двух сигналов и алгоритмы решающих правил, наилучших с точки зрения рассмотренных критериев.

Важность материалов настоящей главы обусловлена тем, что к проблеме различения двух сигналов сводится много радиотехнических задач, таких, как задача обнаружения известного сигнала на фоне шума, работа бинарных каналов связи и т. д. кроме того, этот материал можно рассматривать как подготовительный к изучению вопросов различения большего числа сигналов и оценивания параметров передаваемого сигнала.

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных критериев, полезно сначала остановиться на общих для всех критериев вопросах. Так, при различении двух сигналов  $\bar{S}_0$  и  $\bar{S}_1$  любое решающее правило сводится к разбиению области возможных значений наблюдаемого сигнала  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ .

После того как решающее правило выбрано, т. е. проведено разбиение пространства наблюдений на подобласти, возможны следующие четыре ситуации:

- 1) верна гипотеза  $H_0$ , и принято решение  $\gamma_0$ ;
- 2) верна гипотеза  $H_0$ , но приняли решение  $\gamma_1$  в пользу гипотезы  $H_1$ ;
- 3) верна гипотеза  $H_1$ , и принято решение  $\gamma_1$ ;
- 4) верна гипотеза  $H_1$ , но принято решение  $\gamma_0$ . Вторая и четвертая ситуации характеризуют ошибочно принятое решение.

Следует отметить, что если наверняка передается сигнал  $\bar{S}_0$ , то возможны только две первых ситуации и они образуют полную группу событий. Если же с вероятностью единица передается сигнал  $\bar{S}_1$ , то возможны только третья и четвертая ситуации, которые, в свою очередь, образуют полную группу. Наконец, если сигнал  $\bar{S}_0$  может быть передан с вероятностью  $P_0$ , то возможны все четыре ситуации и теперь все четыре образуют полную группу событий. Обозначим вероятности появления этих ситуаций  $P_{00}$ ,  $P_{01}$ ,  $P_{11}$  и  $P_{10}$  соответственно, где первый индекс относится к передаваемому сигналу (гипотезе), второй – к принимаемому решению. Вероятность  $P_{ij}$  есть совместная вероятность появления двух событий: передачи сигнала  $\bar{S}_i$  и вынесения решения  $\gamma_j$ , где  $i = 0, 1$  и  $j = 0, 1$ . По формуле Байеса эту вероятность можно представить в следующем виде:

$$P_{ij} = P_i P(\gamma_j / H_i), \quad (1.1)$$

где  $P_i$  - априорная вероятность того, что передавался сигнал  $\bar{S}_i$ ,

$P(\gamma_j / H_i)$  - условная вероятность принятия решения  $\gamma_j$ , когда передавался сигнал  $\bar{S}_i$ .

Априорные вероятности  $P_i$  определяются статистическими характеристиками источника сообщений, а условные вероятности вынесения решения  $P(\gamma_j / H_i)$  - выбором решающего правила.

Рассмотрим более подробно эти условные вероятности. Вначале из возможных ситуаций при вынесении решения отберем только такие, которые соответствуют передаче сигнала  $\bar{S}_0$ . При этом для того, чтобы получить вероятность  $P(\gamma_0 / H_0)$  вынесения решения в пользу гипотезы  $H_0$ , когда передается сигнал  $\bar{S}_0$ , необходимо воспользоваться выражением

$$P(\gamma_0 / H_0) = \int_{\Omega_0} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} \quad (1.2)$$

Аналогично вероятность принять первую гипотезу, когда передается  $\bar{S}_0$ , определяется соотношением

$$P(\gamma_1 / H_0) = \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} \quad (1.3)$$

поскольку других ситуаций при передаче сигнала  $\bar{S}_0$  быть не может, эти события образуют полную группу; значит, их суммарная вероятность равна единице. Действительно,

$$P(\gamma_0 / H_0) + P(\gamma_1 / H_0) = \int_{\Omega_0} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} + \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} = \int_{\Omega} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} \quad (1.4)$$

так как  $\Omega$  – это область всех возможных значений наблюдаемого сигнала  $\bar{y}$ .

На рис. 1.1 представлены условная плотность  $W(\bar{y} / H_0)$  появления наблюдаемого сигнала  $\bar{y}$ , когда передается  $\bar{S}_0$ , а также области  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  для одномерных передаваемых и принимаемых сигналов  $\bar{S}_i$  и  $y$ . Вероятность  $P(\gamma_0 / H_0)$  принять решение в пользу первой

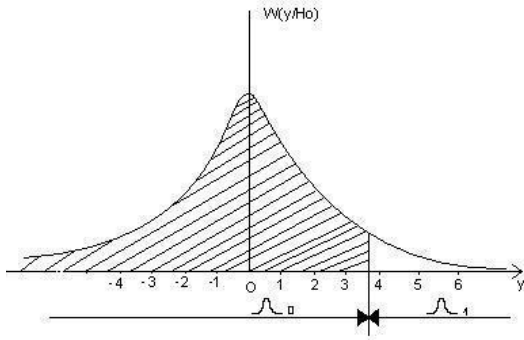


Рис. 1.1. Кривая плотности вероятности значений наблюдаемого сигнала при передаче сообщений

гипотезы равна площади под кривой  $W(y/H_0)$  слева от границы  $y_{сп}$  областей (заштрихованная область). В свою очередь  $P(\gamma_1/H_0)$  - площадь под кривой  $W(y/H_0)$  справа от  $y_{сп}$ . Поскольку площадь под кривой  $W(y/H_0)$  равна единице, сумма вероятностей  $P(\gamma_0/H_0)$  и  $P(\gamma_1/H_0)$  тоже равна единице. Если часть точек области  $\Omega_0$  передать области  $\Omega_1$ , т. е. передвинуть границу  $y_{сп}$  в сторону меньших значений, то вероятности  $P(\gamma_0/H_0)$  и  $P(\gamma_1/H_0)$  перераспределяются, а именно, вероятность  $P(\gamma_0/H_0)$  уменьшится, а  $P(\gamma_1/H_0)$  увеличится. Если же границу переместить в сторону больших значений  $y$ , то уменьшится вероятность ошибочного принятия гипотезы  $H_1 - P(\gamma_1/H_0)$ .

Все сказанное справедливо и для условных вероятностей  $P(\gamma_0/H_1)$  и  $P(\gamma_1/H_1)$  принять решение в пользу нулевой или первой гипотезы, когда передается сигнал  $\bar{S}_1$ . Они определяются аналогичными соотношениями

$$P(\gamma_1/H_1) = \int_{\Omega_1} W(\bar{y}/H_1) d\bar{y} \quad (1.5)$$

$$P(\gamma_0/H_1) = \int_{\Omega_0} W(\bar{y}/H_1) d\bar{y} \quad (1.6)$$

и

$$P(\gamma_1/H_1) + P(\gamma_0/H_1) = 1 \quad (1.7)$$

т. е. также образуют полную группу событий.

Рассмотрим теперь совместные вероятности  $P_{00}$  и  $P_{01}$  передачи сигнала  $\bar{S}_0$  и принятия решения  $\gamma_0$  в первом случае и  $\gamma_1$  во втором. Как следует из (1.1) и (1.4), суммарная вероятность появления одного из этих событий уже не равна 1, т. е.

$$P_{10} + P_{11} = P_1 P(\gamma_0/H_1) + P_1 P(\gamma_1/H_1) = P_1 \quad (1.8)$$

Аналогичный вывод можно сделать относительно вероятностей  $P_{11}$  и  $P_{10}$  при передаче сигнала  $\bar{S}_1$ :

$$P_{10} + P_{11} = P_1 P(\gamma_0/H_1) + P_1 P(\gamma_1/H_1) = P_1 \quad (1.9)$$

перечисленные выше четыре возможных ситуации при принятии решения образуют полную группу и вероятность появления одной из них равна единице:

$$P_{00} + P_{01} + P_{11} + P_{10} = 1 \quad (1.10)$$

Таким образом, принятие решения по любому решающему правилу приводит к реализации одной из перечисленных ситуаций. Выбор конкретного решающего правила приводит лишь к определенным значениям вероятностей  $P_{ij}$  появления указанных ситуаций.

### 1.1. КРИТЕРИЙ МИНИМУМА СРЕДНЕГО РИСКА

Критерий минимума среднего риска характеризует качество правила принятия решения потерями, которые понесет наблюдатель в среднем при многократном использовании этого правила при различении сигналов в неизменных условиях. Эти средние потери часто называют средним риском, или просто риском и обозначают  $R(\delta)$ . Аргументом здесь является правило решения, которое в дальнейшем будем обозначать  $\delta$ . Следует обратить внимание на то, что  $\delta$  обозначает процедуру

принятия решения (последовательность совершаемых действий над наблюдаемым сигналом), а не число.

Средний риск учитывает не только вероятность появления ошибочного решения, но и последствия, связанные с принятием неправильного решения. Обычно эти последствия учитываются назначением штрафа (или потерь наблюдателя). Поскольку при различении двух сигналов ошибочные решения бывают двух типов – передается сигнал  $\bar{S}_0$ , а принимается решение  $\gamma_1$  (вторая из возможных ситуаций) или передается сигнал  $\bar{S}_1$ , а принимается решение  $\gamma_0$  (четвертая ситуация) – штрафы за эти неправильные решения назначаются  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{10}$  соответственно.

В общем случае последствия, связанные с этими ошибочными решениями, неодинаковы, поэтому  $\Pi_{01} \neq \Pi_{10}$ . Для общности и удобства математической записи среднего риска вводят потери наблюдателя и за верные решения  $\Pi_{00}$  и  $\Pi_{11}$  соответственно. Конечно, эти потери обязательно меньше, чем  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{10}$  (в частном случае  $\Pi_{11} = \Pi_{00} = 0$ ).

Таким образом, потери, связанные с реализацией одной из четырех возможных ситуаций, при принятии решения, можно задавать в виде матрицы  $\Pi$

$$\Pi = \|\Pi_{ij}\| \quad (1.11)$$

причем

$$\Pi_{ij} \geq 0 \text{ и } \Pi_{ii} < \Pi_{ij}, \forall i \neq j \text{ (кроме } i = j \text{)};$$

здесь первый индекс обозначает номер передаваемого сигнала, а второй – номер принятого решения.

Для того чтобы вычислить средние потери  $R(\delta)$ , надо просуммировать элементы  $\Pi_{ij}$  матрицы штрафов с вероятностями  $P_{ij}$  соответствующих ситуаций при вынесении решения на основании решающего правила  $\delta$ . Учитывая (1.1), (1.5), (1.6), получим

$$R(\delta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Pi_{ij} P_{ij} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Pi_{ij} P_j P(\gamma_j / H_i) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \Pi_{ij} P_i \int_{\Omega_j} W(\bar{y} / H_i) d\bar{y} \quad (1.12)$$

Из последнего соотношения видно, что средний риск определяется как априорными данными – вероятностями  $P_0$  и  $P_1$ , статистическими характеристиками помех, заданной матрицей штрафов, так и правилом принятия решения, которое устанавливает области интегрирования.

Наилучшим правилом решения, с точки зрения критерия минимума среднего риска – критерия Байеса, будет такое разбиение области возможных значений  $\bar{y}$  на две подобласти, при котором средние потери  $R(\delta)$  минимальны. Такие решающие правила называются байесовскими.

Покажем, что эта постановка задачи позволяет в общем виде указать наилучший принцип разбиения области  $\Omega$  на подобласти  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ . Преобразуем выражение для среднего риска (1.12) так, чтобы интегрирование вылось лишь по одной области, например по области  $\Omega_1$ . Тогда перебором возможных правил решения  $\delta$  и средних потерь  $R(\delta)$ , соответствующих этим правилам, можно обеспечить изменение лишь области  $\Omega_1$ . Воспользовавшись соотношениями (1.3) – (1.5), перепишем средний риск следующим образом:

$$\begin{aligned} R(\delta) &= \Pi_{11} P_1 \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_1) d\bar{y} + \Pi_{10} P_1 [1 - \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_1) d\bar{y}] + \Pi_{00} P_0 [1 - \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y}] + P_0 \Pi_{01} \int_{\Omega_1} W(\bar{y} / H_0) d\bar{y} = \\ &= P_1 \Pi_{10} + P_0 \Pi_{00} + \int_{\Omega_1} [P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) W(\bar{y} / H_0) - P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) W(\bar{y} / H_1)] d\bar{y}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поскольку элементы матрицы потерь неотрицательны и  $\Pi_{ii} < \Pi_{ij}$ , первые два слагаемых в (1.13) неотрицательны, а подынтегральное выражение является разностью неотрицательных функций. Поэтому минимальное значение потерь будет достигнуто тогда, когда в (1.13) входят только такие точки, для которых подынтегральное выражение неположительно, т. е. для которых выполняется условие

$$P_1 (\Pi_{10} - \Pi_{11}) W(\bar{y} / H_1) \geq P_0 (\Pi_{01} - \Pi_{00}) W(\bar{y} / H_0). \quad (1.14)$$



когда для возможного наблюдаемого сигнала  $y$  неравенство (1.14) не выполняется, он должен быть отнесен к подобласти  $\Omega_0$ . Граничные точки пространства наблюдений, разделяющие области  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , удовлетворяют условию.

$$P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})W(\bar{y}/H_1) = P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})W(\bar{y}/H_0).$$

Эти точки относят к одной из возможных областей, поскольку они не изменяют величины среднего риска. Будем считать, что они относятся к области  $\Omega_1$ .

Теперь выражение (1.14), разбивающее пространство  $\Omega$  оптимальным образом в соответствии с критерием минимума среднего риска на две подобласти  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , можно записать в виде решающего правила.

Если для принятого сигнала  $y$  выполняется соотношение

$$\frac{P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})W(\bar{y}/H_1)}{P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})W(\bar{y}/H_0)} \geq 1, \quad (1.14, a)$$

то следует принимать решение  $\gamma_1$  в пользу принятия гипотезы  $H_1$ . Если же выполняется соотношение

$$\frac{P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})W(\bar{y}/H_1)}{P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})W(\bar{y}/H_0)} < 1,$$

то принимается решение  $\gamma_0$ . При этом средний риск принятия решения будет минимальной величины.

Два последних неравенства перепишем в следующем объединенном виде:

$$\lambda(\bar{y}) = \frac{W(\bar{y}/H_1)}{W(\bar{y}/H_0)} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})}{P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})}. \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что решающее правило распадается как бы на две части. Левая часть неравенства – отношение правдоподобия – показывает, какие преобразования надо произвести над принятым сигналом  $\bar{y}$ . Эти преобразования определяются условными плотностями принятого сигнала  $W(\bar{y}/H_1)$  и  $W(\bar{y}/H_0)$ , т. е. характеризуется плотностью распределения помехи, типом связи сигнала с помехой и передаваемыми сигналами.

Правая часть неравенства представляет собой порог  $\eta$ , с которым сравнивается отношение правдоподобия

$$\eta = \frac{P_0(\Pi_{01} - \Pi_{00})}{P_1(\Pi_{10} - \Pi_{11})}. \quad (1.16)$$

Этот порог определяется априорными вероятностями передаваемых сигналов и выбранной матрицей штрафов.

Таким образом, структурную схему устройств, реализующих решающее правило, можно изобразить так, как это представлено на рис. 1.2.

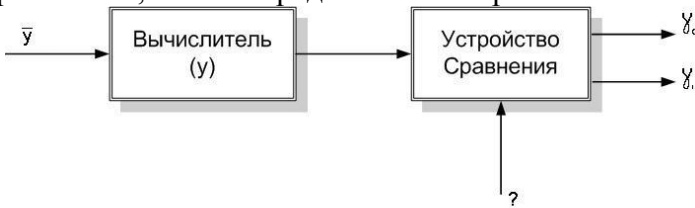


Рис. 1.2. Структурная схема оптимального различителя сигналов

То, что решающее правило зависит от априорных вероятностей выбора сигналов и матрицы потерь лишь через величину порога  $\eta$ , имеет большое практическое значение, поскольку часто эти характеристики являются просто предположениями, принятыми на основе предыдущего опыта.

Очень часто пользуются другой эквивалентной записью решающего правила (1.15), когда сравнение отношения правдоподобия  $\lambda(\bar{y})$  с порогом  $\eta$  заменяют сравнением значений взаимнооднозначной функции  $\phi$  от них:

$$\phi[\lambda(\bar{y})] \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \phi(\eta). \quad (1.17)$$

поскольку сила неравенства не меняется, решающее правило (1.17) оптимально. Но специальным подбором функции  $\phi$  можно существенно упростить преобразования, которые можно проделать над принятым сигналом  $\bar{y}$ . Функции подобного вида называют достаточной статистикой. Чаще всего берут логарифм от левой и правой части неравенства (1.15)

$$\ln \frac{W(\bar{y} / H_1)}{W(\bar{y} / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \ln \eta \quad (1.18)$$

следует отметить, что соотношения (1.15), (1.17) и (1.18) являются аналитической формой записи оптимального с точки зрения критерия минимума среднего риска решающего правила.

Рассмотрим два важных частных случая байесовских решающих правил.

### Критерий максимальной апостериорной вероятности

Этот частный случай байесовского правила встречается тогда, когда нет оснований назначать разные штрафы за ошибочные решения, т. е.  $\Pi_{10} = \Pi_{01} = \Pi$ . Платы за правильные решения назначаются равными и, как правило, нулевыми  $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$ . Тогда из (1.16) следует, что конкретные значения штрафов за ошибочное решение не влияют на вид решающего правила

$$\eta = \frac{P_0}{P_1}.$$

Поэтому эти платы можно взять для простоты единичными:  $\Pi = 1$ . Матрица потерь, составленная из указанных элементов,

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

называется простой.

Байесовское решающее правило при такой матрице потерь принимает следующий вид:

$$\lambda(\bar{y}) = \frac{W(\bar{y} / H_1)}{W(\bar{y} / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \frac{P_0}{P_1} \quad (1.20)$$

или

$$\ln \lambda(\bar{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \ln \frac{P_0}{P_1} \quad (1.21)$$

В свою очередь, средние потери такого правила

$$R = P_0 P(\gamma_1 / H_0) + P_1 P(\gamma_0 / H_1) = P_{ош}, \quad (1.22)$$

где  $P_{ош}$  - безусловная вероятность ошибочного решения.

Таким образом, при простой функции потерь и произвольных априорных вероятностях байесовское правило решения обеспечивает минимальную вероятность ошибочного решения.

Наблюдатель, обеспечивающий при различении сигналов наименьшую вероятность ошибки, называется идеальным наблюдателем. Поэтому решающее правило (1.21) имеет специальное название – наилучшее решающее правило по критерию идеального наблюдателя.

Левая часть неравенства (1.14, а) есть по существу отношение апостериорных (послеопытных) вероятностей  $P(H_0 / \bar{y})$  и  $P(H_1 / \bar{y})$  выполнения гипотез  $H_0$  и  $H_1$ , когда принятый сигнал равен  $\bar{y}$  (под опытом здесь понимается наблюдение  $\bar{y}$ ). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{P_1 W(\bar{y} / H_1)}{P_0 W(\bar{y} / H_0)} &= \frac{P_1 W(\bar{y} / H_1) d\bar{y}}{P_0 W(\bar{y} / H_0) d\bar{y}} = \frac{P(H_1, \bar{y})}{P(H_0, \bar{y})} = \\ &= \frac{P(\bar{y}) P(H_1 / \bar{y})}{P(\bar{y}) P(H_0 / \bar{y})} = \frac{P(H_1 / \bar{y})}{P(H_0 / \bar{y})}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где  $P(H_0, \bar{y})$  - совместная вероятность передачи сигнала  $S_0$  и принятия конкретной реализации  $\bar{y}$ ;

$P(H_0, \bar{y})$  - условная апостериорная вероятность истинности гипотезы  $H_0$  (передачи сигнала  $S_0$ ) при данной конкретной реализации  $\bar{y}$ .

Теперь решающее правило (1.20) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{P(H_1 / \bar{y})}{P(H_0 / \bar{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} 1, \quad (1.24)$$

т. е. наблюдатель принимает решение в пользу той гипотезы, апостериорная вероятность которой больше. Поскольку эта процедура эквивалентна решающему правилу (1.20), последнее имеет еще одно название – наилучшее решающее правило по критерию максимальной апостериорной вероятности, к которому также прибегают, когда нет достаточных объективных данных для выбора матрицы потерь.

### Критерий максимального отношения правдоподобия

Этот второй частный случай байесовского правила решения имеет место тогда, когда не только платы за неправильные решения  $\Pi_{01}$  и  $\Pi_{10}$  одинаковы, но одинаковы и априорные вероятности передачи сигналов  $\bar{S}_0$  и  $\bar{S}_1$ , т. е.  $P_0 = P_1$ .

В этом случае решающее правило принимает вид

$$\lambda(\bar{y}) = \frac{W(\bar{y} / H_1)}{W(\bar{y} / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} 1, \quad (1.25)$$

т. е. решение в пользу той или иной гипотезы принимается только на основании оценки величины отношения правдоподобия  $\lambda(\bar{y})$ .

Особое значение решающее правило (1.25) приобретает тогда, когда нельзя достаточно обоснованно назначить матрицу потерь и выбрать априорные вероятности. В этом случае нельзя и качество решающего правила характеризовать средними потерями.

В таких условиях решающее правило (1.25) использует всю «достоверную» информацию о типе связи сигнала с помехой, статистических характеристиках помехи, передаваемого и принятого сигналов.

Остается лишь выяснить вопрос, оптимально ли это правило решения, и если оптимально, то в каком случае. Для ответа на этот вопрос следует подробно остановиться на понятиях – функция правдоподобия и отношение правдоподобия. Отдельного рассмотрения эти понятия заслуживают и потому, что, как следует из соотношения (1.15), все байесовские правила решения основаны на сравнении отношения правдоподобия с некоторым порогом.

### Функция правдоподобия и отношение правдоподобия

Обратимся к математической модели канала, представленной в новых обозначениях на рис. 1.3. Каждая из возможных ситуаций (гипотез)  $H_i$  устанавливает в пространстве наблюдений  $\{\bar{y}\}$  определенное распределение вероятностей  $W(\bar{y} / H_i)$ , разное при разных условиях  $H_i$ . На рис. 1.3 множество наблюдаемых сигналов  $\bar{y}$  условно показано в виде точек оси абсцисс  $\bar{y}$  (хотя сами точки  $\bar{y}$  могут быть точками сногмерного пространства). Для наглядности оси абсцисс изображены разнесено при разных гипотезах  $H_i$ . Серия кривых  $W(\bar{y} / H_i)$  – условные плотности вероятностей.

С точки зрения наблюдателя положение иное: ему предъявлен вполне определенный, конкретный сигнал  $\bar{y}_k$ , но не известно условие, при котором этот сигнал появился. Перебирая возможные гипотезы, наблюдатель как бы сравнивает ординаты  $W(\bar{y}_k / H_i)$ , «выхваченные» из разных распределений ( $i = \text{var}$ ) при фиксированном  $\bar{y}_k$ . Полученный таким образом ряд значений  $W(\bar{y}_k / H_1) W(\bar{y}_k / H_2), \dots$  можно рассматривать как некоторую функцию дискретного аргумента – номера гипотезы.

Эта функция уже не имеет смысла распределения вероятностей, но тем не менее сопоставление этих ординат дает возможность оценить, насколько правдоподобно то или иное предположение, та или иная гипотеза. Если, например, условная плотность получить данный сигнал  $\bar{y}_k$  при гипотезе  $H_3$  больше, чем при гипотезе  $H_4$ , то более похоже на правду, что  $\bar{y}_k$  вызван ситуацией  $H_3$ , чем ситуацией  $H_4$ . Численная мера «похожести на правду» и заключена в ординатах рассматриваемой функции, носящей название функции правдоподобия.

Итак, функция правдоподобия представляет собой совокупность ординат  $W(\bar{y}_k / H_i)$ , взятых из всех условных распределений ( $i = \text{var}$ ) при фиксированном  $\bar{y}_k$ . Аргументом функции правдоподобия является номер гипотезы, а не  $\bar{y}_k$ .

## 1.2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБОЧНЫХ И ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ.

Для иллюстрации полученных ранее правил решения рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Примем, что сигналами источника сообщений является постоянное напряжение, принимающее значения  $1B$  и  $5B$ . При передаче по каналу связи это напряжение искажается аддитивной помехой, распределенной в соответствии с нормальным законом с нулевым средним и единичной дисперсией. Необходимо на основе анализа сигнала  $\bar{y}$  в соответствии с рассмотренными ранее критериями принять решение – какой из двух возможных сигналов  $S_0 = 1B$  или  $S_1 = 5B$  присутствует во входной смеси  $y = S_i + \xi$ .

При вычислении отношения правдоподобия, необходимо для построения различителя, нужно знать кривые условных плотностей распределения различителя, нужно знать кривые условных плотностей распределения вероятностей значений  $y$ . Но условием задачи эти кривые определены (рис. 1.4). в соответствии с критерием максимального правдоподобия (1.25) следует разбить пространство всех возможных значений наблюдаемой величины  $y$  – в данном случае это числовая ось – на две области  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ . Граница этих областей задается соотношением (1.25). В нашем примере граница областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  может быть найдена графически.

Действительно, из рис. 1.4 видно, что  $\lambda(y) = \frac{W(y/H_1)}{W(y/H_0)}$  больше единицы правее точки  $A$  и меньше единицы – левее ее, поскольку кривые  $W(y/H_1)$  и  $W(y/H_0)$  симметричны относительно точек  $y=1$  и  $y=5$  соответственно. В этом случае  $A = \frac{1+5}{2} = 3$ .

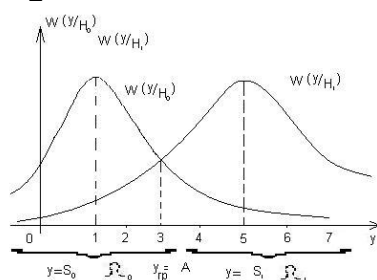


Рис. 1.4. Кривые распределения условных плотностей вероятностей значений принятого сигнала

Разбиение пространства сигналов на области можно осуществить и аналитически. Поскольку  $W(y/H_1)$  и  $W(y/H_0)$  известны, то

$$\lambda(y) = \frac{W(y/H_1)}{W(y/H_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-5)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}} = e^{8y-24},$$

а следовательно,

$$\ln \lambda(y) = 8y - 24. \quad (1.26)$$

Тогда граничное значение  $y$  следует определить из уравнения

$$8y - 24 = 0,$$

т. е.

$$y = y_{cp} = A = 3B.$$

Таким образом в соответствии с критерием максимального правдоподобия в рассматриваемом примере процедура принятия решения сводится к сравнению принятого значения величины  $y$  с порогом

$A = 3B$ . Если, например, принят сигнал  $y = 2B$ , то следует принять решение  $\gamma_0$ ; если же  $y = 3,5B$ , то  $-\gamma_1$ .

Для того чтобы построить решающее правило в соответствии с критерием идеального наблюдателя, нужно знать априорные вероятности появления сигналов  $P_0$  и  $P_1$ . Если они заданы, то можно построить графики взвешенных плотностей  $P_0 W[y/1B]$  и  $P_1 W[y/5B]$  и по ним графически найти границу, разделяющую области  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  (рис. 1.5).

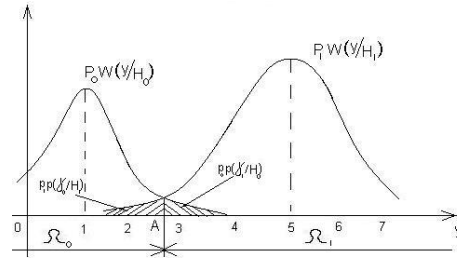


Рис. 1.5. Кривые взвешенных условных плотностей вероятностей значений сигнала

Но после того как найдена граница наиболее правдоподобного решающего правила, искомую границу легче найти аналитически. Из (1.20), (1.21) и (1.26) следует

$$\ln \lambda(y) = 8y - 24 = \ln \frac{P_0}{P_1},$$

отсюда

$$y_{cp} = 3 + \frac{1}{8} \ln \frac{P_0}{P_1}. \quad (1.27)$$

Таким образом, при использовании дополнительной информации – априорных вероятностей  $P_0$  и  $P_1$  – граница смещается в сторону менее вероятной гипотезы (см. рис. 1.5).

Если же построить решающее правило в соответствии с критерием минимума среднего риска, то в рассматриваемом примере граничное значение сигнала определяется соотношением

$$y_{cp} = 3 + \frac{1}{8} \ln \frac{P_0}{P_1} + \frac{1}{8} \ln \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}}.$$

Таким образом при разбиении пространства  $\Omega$  на области  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  граница строится с учетом не только априорных вероятностей, но и заданных величин потерь.

**Пример.** Рассмотрим общий случай передачи одного из двух сообщений  $\bar{S}_0$  или  $\bar{S}_1$ . Сообщения эти заданы в виде совокупности отсчетов  $(S_{01}, S_{02}, \dots, S_{0n})$  и  $(S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1n})$ , взятых в соответствии с теоремой Котельникова. Априорные вероятности передачи сигналов  $\bar{S}_0$  и  $\bar{S}_1$  –  $P_0$  и  $P_1$ , соответственно. В канале связи передаваемые сигналы искажаются аддитивными, белым, нормальным шумом с нулевым математическим ожиданием и заданной величиной дисперсии  $\sigma^2$ . На основании сказанного каждый отсчет принятого сигнала записывается в виде  $y_k = S_{ik} + \xi_k$ , где  $i = 0, 1$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Необходимо оптимальным образом с точки зрения критерия идеального наблюдателя по выборке  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  принять решение: какой из возможных сигналов  $\bar{S}_0$  или  $\bar{S}_1$  передается по линии связи.

Вычислим отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \lambda(y) &= \frac{W(\bar{y}/H_1)}{W(\bar{y}/H_0)} = \frac{\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_k - S_{1k})^2}}{\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_k - S_{0k})^2}} = \\ &= \prod_{k=1}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(y_k - S_{1k})^2 - (y_k - S_{0k})^2] \right\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

подставив (1.28) в (1.18), получим следующую запись решающего правила:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{k=1}^n (y_k - S_{1k})^2 - \sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2 \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \ln \eta$$

или

$$\sum_{k=1}^n (y_k - S_{1k})^2 - \sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} - 2\sigma^2 \ln \eta. \quad (1.29)$$

в частности, при  $\eta = \frac{P_0}{P_1}$  получим решающее правило, оптимальное по критерию идеального наблюдателя:

$$\sum_{k=1}^n (y_k - S_{1k})^2 - \sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} 2\sigma^2 \ln \frac{P_1}{P_0}. \quad (1.30)$$

при равновероятных сигналах  $P_0 = P_1$  решающее правило приобретает вид

$$\sum_{k=1}^n (y_k - S_{1k})^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2, \quad (1.31)$$

имеющий наглядное геометрическое толкование: а именно, в пространстве наблюдения и принимаемые и ожидаемые сигналы представляются точками с координатами  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ;  $\bar{S}_0 = (S_{01}, S_{02}, \dots, S_{0n})$  и

$\bar{S}_1 = (S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1n})$ . Следовательно,  $\sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2$  равно квадрату расстояния в евклидовом пространстве

точки принятого сигнала  $\bar{y}$  от точки, соответствующей ожидаемому сигналу  $\bar{S}_0$ . Аналогично

$\sum_{k=1}^n (y_k - S_{0k})^2$  есть квадрат расстояния от точки принятого сигнала до точки  $\bar{S}_0$ .

При такой интерпретации процедура принятия решения (1.31) выглядит следующим образом. Если в пространстве сигналов расстояние от  $\bar{y}$  до  $\bar{S}_1$  меньше, чем от  $\bar{y}$  до  $\bar{S}_0$ , то принимается решение  $\gamma_0$ . И наоборот, если  $\bar{y}$  ближе к  $\bar{S}_1$ , то принимается первая гипотеза. Граница между областями  $\Omega$  и  $\Omega_1$  - это геометрическое место точек, равноудаленных от  $\bar{S}_0$  и  $\bar{S}_1$ .

Соотношения (1.29), (1.30) и (1.31) можно упростить, выполнив преобразования

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (y_k^2 - 2y_k S_{1k} + S_{1k}^2 - y_k^2 + 2y_k S_{0k} - S_{0k}^2) &= -2 \sum_{k=1}^n y_k (S_{1k} - S_{0k}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n S_{1k}^2 - \sum_{k=1}^n S_{0k}^2, \end{aligned}$$

после чего решающие правила (1.29) - (1.31) принимают вид:

$$\sum_{k=1}^n y_k (S_{1k} - S_{0k}) \underset{H_2}{\overset{H_1}{><}} \sigma^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{1k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{0k}^2; \quad (1.32)$$

$$\sum_{k=1}^n y_k (S_{1k} - S_{0k}) \underset{H_2}{\overset{H_1}{><}} \sigma^2 \ln \frac{P_1}{P_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{1k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{0k}^2; \quad (1.33)$$

$$\sum_{k=1}^n y_k (S_{1k} - S_{0k}) \underset{H_2}{\overset{H_1}{><}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{1k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{0k}^2. \quad (1.34)$$

В левой части неравенств (1.32) - (1.34) находится величина

$$\psi = \sum_{k=1}^n y_k (S_{1k} - S_{0k}), \quad (1.35)$$

пропорциональная корреляционному моменту принятого сигнала и разностного  $\bar{\Delta} = \bar{S}_1 - \bar{S}_0$ . Так же, как и отношение правдоподобия, величина  $\psi$  является достаточной статистикой, только гораздо более простой для аппаратной реализации.

Запись решающего правила через достаточную статистику  $\psi$  полезна еще и потому, что упрощается вычисление качества решения.

Действительно, качество рассмотренных процедур различения оценивается величиной среднего риска. Но для его вычисления необходимо знать условные вероятности правильных и ошибочных решений вида  $P(\gamma_j / H_i)$ ; здесь, как и ранее,  $i, j = 0, 1$ . Вероятность  $P(\gamma_j / H_i)$  - вероятность того, что появится наблюдаемый сигнал, принадлежащий области  $\Omega_j$ , когда верна гипотеза  $H_i$ . Эта вероятность

равна  $n$ -мерному интегралу от условной плотности  $W(\bar{y}/H_i)$  по области  $\Omega_j$ . Вычислить такой интеграл непросто.

Задача вычисления вероятности  $P(\gamma_j/H_i)$  упрощается, если иметь в виду запись решающего правила через достаточную статистику  $\lambda(\bar{y})$ -отношение правдоподобия. Поскольку отношение правдоподобия есть одномерная величина,  $P(\gamma_j/H_i)$  равна площади под кривой условной плотности распределения вероятностей  $W(\lambda/H_i)$  по области  $\Omega_j$ , что иллюстрируется рис. 1.6. Но и здесь есть сложность. Даже при простых законах распределения помехи закон распределения отношения правдоподобия может быть очень сложным. В частности, для рассматриваемой задачи, где помеха аддитивна и нормальна,  $W(\lambda/H_i)$ -негауссов.

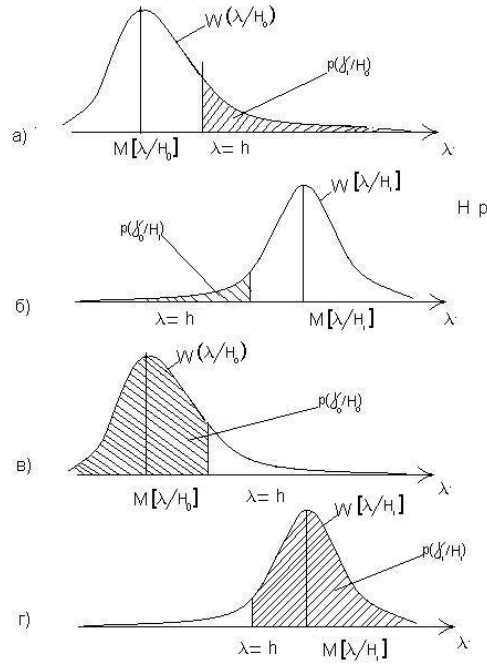


Рис. 1.6. К определению условных вероятностей правильных и ошибочных решений: а -  $P(\gamma_1/H_0)$ ; б -  $P(\gamma_0/H_1)$ ; в -  $P(\gamma_0/H_0)$ ; г -  $P(\gamma_1/H_1)$ .

Поэтому более полезными могут оказаться другие достаточные статистики. В нашем примере эта достаточная статистика  $\psi$  (1.35). Она одномерна, и ее закон распределения гауссов, так как она является суммой нормально распределенных случайных величин  $y_k$ .

Приведем вычисление вероятностей ошибочных решений в рассматриваемой задаче для общего вида решающего правила (1.32). Для этого нам понадобятся два условных закона распределения  $W(\psi/H_0)$  и  $W(\psi/H_1)$ . Поскольку они нормальны, надо вычислить две пары условных параметров:  $M(\psi/H_0)$ ,  $D(\psi/H_0)$  и  $M(\psi/H_1)$ ,  $D(\psi/H_1)$ . Вычислим условное среднее и дисперсию  $\psi$ , когда верна гипотеза  $H_0$ . В этом случае  $y_k = S_{0k} + \xi_k$ . Значит,  $\psi = \sum_{k=1}^n (\xi_k + S_{0k})(S_{1k} - S_{0k})$  и условное среднее статистики

$$\begin{aligned} M[\psi/H_0] &= \left\langle \sum_{k=1}^n [\xi_k (S_{1k} - S_{0k}) + S_{0k} (S_{1k} - S_{0k})] \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n S_{0k} (S_{1k} - S_{0k}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Чтобы вычислить дисперсию, отцентрируем величину  $\psi$ , т. е. введем  $\psi^0$ :

$$\psi^0 = \psi - M[\psi/H_0] = \sum_{k=1}^n \xi_k (S_{1k} - S_{0k}).$$

Значит, дисперсия

$$D[\psi/H_0] = M[\psi^2/H_0] = \left\langle \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \xi_k \xi_l (S_{1k} - S_{0k})(S_{1l} - S_{0l}) \right\rangle.$$

Поэтому отсчеты помехи некорреляционны, слагаемые в последнем соотношении при  $k \neq l$  равны нулю. Следовательно,

$$D[\psi / H_0] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n (S_{1k} - S_{0k})^2 = D[\psi]. \quad (1.37)$$

Аналогично можно найти два других условных параметра:

$$M[\psi / H_1] = \sum_{k=1}^n S_{1k} (S_{1k} - S_{0k}) \quad (1.38)$$

и

$$D[\psi / H_1] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n (S_{1k} - S_{0k})^2 = D[\psi]. \quad (1.39)$$

Теперь можно вычислить вероятности  $P[\gamma_1 / H_0]$  и  $P[\gamma_0 / H_1]$ .

Из нормальности закона  $W[\psi / H_0]$  и соотношений (1.32), (1.36), (1.37) следует, что

$$P[\gamma_1 / H_0] = \int_{\psi_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\psi]}} e^{-\frac{1}{2D[\psi]} \{\psi - M[\psi / H_0]\}^2} d\psi,$$

где

$$\psi_0 = \sigma^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{1k}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_{0k}^2.$$

Вводя новую переменную

$$\mathcal{G}_0 = \frac{\psi - M[\psi / H_0]}{\sqrt{D[\psi]}}, \quad (1.40)$$

можно упростить выражение, определяющее условную вероятность

$$P[\gamma_1 / H_0] = \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{G}_0^2} d\mathcal{G}_0,$$

где

$$\theta_0 = -\frac{\psi_0 - M[\psi / H_0]}{\sqrt{D[\psi]}}. \quad (1.41)$$

Для вычисления  $P[\gamma_0 / H_1]$  можно воспользоваться таблицами интеграла вероятностей вида

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.42)$$

Таким образом,

$$P[\gamma_1 / H_0] = 1 - \Phi(\theta_0).$$

Аналогично, учитывая (1.32), (1.38), (1.39), можно вычислить  $P[\gamma_0 / H_1]$ .

Как и ранее, вводя новые обозначения

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\psi - M[\psi / H_1]}{\sqrt{D[\psi]}},$$

получим

$$P[\gamma_0 / H_1] = \int_{-\infty}^{\theta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{G}_1^2} d\mathcal{G}_1 = \Phi(\theta_1), \quad (1.43)$$

где

$$\theta_1 = \frac{\psi_0 - M[\psi / H_1]}{\sqrt{D[\psi]}}. \quad (1.44)$$

Значения  $\theta_0$  и  $\theta_1$  можно упростить. Как известно, при дискретизации сигнала полагают  $\Delta t \leq \frac{1}{2F}$ ,

где  $F$  - верхняя частота спектра дискретизируемого сигнала. В этом случае

$$\sum_{k=1}^n (S_{0k} - S_{1k})^2 = \frac{\Delta t}{\Delta t} \sum_{k=1}^n (S_{0k} - S_{1k})^2 = \frac{1}{\Delta t} \mathcal{E}_{S_0, S_1} \quad (1.45)$$

где  $\mathcal{E}_{S_0, S_1}$  - энергия разностного сигнала  $\Delta S(t) = S_0(t) - S_1(t)$ .



Кроме того, поскольку  $\sigma^2 = FN_0$ , где  $N_0$  - спектральная плотность шума, то отношение энергии сигнала к мощности шума определится следующим выражением:

$$\frac{\sum_{k=1}^n (S_{0k} - S_{1k})^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{\Delta t} \mathfrak{E}_{S_0, S_1}}{\sigma^2} = \frac{2F \mathfrak{E}_{S_0, S_1}}{\sigma^2} = \frac{2 \mathfrak{E}_{S_0, S_1}}{N_0} = q^2, \quad (1.46)$$

где  $q$  определяет отношение сигнал / шум.

Следовательно,

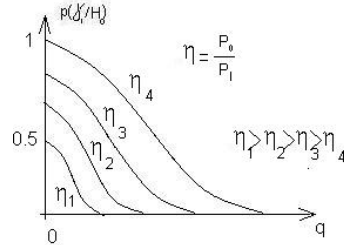


Рис. 1.7. Зависимость условной вероятности ошибочного решения от отношения сигнал/шум

$$\theta_0 = \frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}; \quad (1.47)$$

$$\theta_1 = -\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q} \quad (1.48)$$

учитывая (1.47), (1.48), (1.42), (1.43), получим

$$P(\gamma_1 / H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}\right), \quad (1.49)$$

$$P(\gamma_0 / H_1) = \Phi\left(-\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}\right). \quad (1.50)$$

Зависимость  $P(\gamma_1 / H_0)$  от величины  $q$  при различных значениях  $\eta = \frac{P_0}{P_1}$  приведена на рис. 1.7.

### 1.3. МИНИМАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ

В разделе 1.1 показано, как строить правила решения, приводящие к наименьшим потерям, если известны условные плотности  $W(\bar{y} / H_0)$  и  $W(\bar{y} / H_1)$ , матрица штрафов  $\|P\|$  и априорные вероятности  $P_0$  и  $P_1$  передаваемых сигналов  $S_0$  и  $S_1$  соответственно.

Но к сожалению, далеко не во всех случаях эта информация известна или является достаточно надежной. Чаще всего ненадежна информация об априорных вероятностях  $P_0$  и  $P_1$ .

В этих условиях нельзя вычислить истинные средние потери, связанные с выбранным решающим правилом, и использовать их для отбора наилучшего. Следовательно, нужно искать какую-то другую характеристику качества решения.

Такой характеристикой может служить максимальная величина средних потерь. Действительно, не имея возможности вычислить истинные средние потери решающего правила, мы можем, перебирая возможные значения априорных вероятностей  $P_0$  и  $P_1$ , выявить максимальные средние потери  $R_{\max}(\delta_1)$  данного решающего правила при самых неблагоприятных априорных вероятностях. Затем выбирается другое решающее правило и для него перебором  $P_0$  и  $P_1$  отыскивается максимальная величина средних потерь  $R_{\max}(\delta_2)$  (в общем случае уже при других значениях  $P_0$  и  $P_1$ ). Перебирая таким образом все возможные решающие правила, мы можем выбрать такое правило, для которого величина максимальных средних потерь минимальна, т. е.

$$R(\delta_{MM}) = \min_{\delta} \max_{P_0, P_1} R(\delta). \quad (1.51)$$

Такой критерий отбора решающих правил называется минимаксным критерием качества, а наилучшее с точки зрения данного критерия правило называется минимаксным решающим правилом.

А. Вальд показал, что минимаксное правило решения совпадает с байесовским решением для наименее благоприятного распределения априорных вероятностей, т. е. указанный выше перебор следует производить не среди всех возможных решающих правил, а лишь среди байесовских.

Это утверждение проиллюстрируем следующим образом. Вычислим истинные средние потери произвольного решающего правила, построенного при неизвестных  $P_0$  и  $P_1$ . Поскольку  $P_0 + P_1 = 1$ , средние потери можно считать функцией выбранного правила решения  $\delta$  и одной из априорных вероятностей, например  $P_1$ . Для удобства записи обозначим ее как  $P_1 = g$ . В соответствии с (1.12)

$$\begin{aligned} R(\delta, g) &= \Pi_{00}(1-g)P(\gamma_0 / H_0) + \Pi_{01}(1-g)P(\gamma_1 / H_0) + \\ &+ \Pi_{10}gP(\gamma_0 / H_1) + \Pi_{11}gP(\gamma_1 / H_1) = \\ &= \Pi_{00}P(\gamma_0 / H_0) + \Pi_{01}P(\gamma_1 / H_0) + \\ &+ [\Pi_{10}P(\gamma_0 / H_1) + \Pi_{11}P(\gamma_1 / H_1) - \Pi_{00}P(\gamma_0 / H_0) - \Pi_{01}P(\gamma_1 / H_0)]g = \\ &= r_0 + (r_1 - r_0)g, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где

$$r_0 = \Pi_{00}P(\gamma_0 / H_0) + \Pi_{01}P(\gamma_1 / H_0) \quad (1.53)$$

- условный риск вынесения решения, когда истинна нулевая гипотеза  $H_1$ .

Из (1.53) и (1.54) следует, что условные риски  $r_0$  и  $r_1$  определяются лишь матрицей потерь и условными вероятностями решения; последние, как показано во введении к настоящей главе, определяются выбранным правилом решения. Поскольку наше правило решения строилось без учета априорных вероятностей, условные вероятности  $P(\gamma / H_i)$  и условные риски  $r_0$  и  $r_1$  не зависят от априорной вероятности  $g$ . Следовательно, средний риск решающего правила, построенного без учета априорной информации, являются линейной функцией  $g$  с тангенсом угла наклона  $r_1 - r_0$ .

На рис. 1.8 представлены средние риски возможных правил. Для сравнения на рис. 1.9 представлена типичная зависимость среднего риска байесовского решающего правила  $\delta^*$ , учитывающего априорное распределение. Любопытно совместить эти два рисунка, т.е. на одном и том же графике представить зависимости средних потерь  $R(\delta^*, g)$  байесовского решающего правила  $\delta^*$  и средних потерь  $R(\delta, g)$ , построенных без учета априорных вероятностей гипотез. Из определения байесовского решающего правила, как оптимального, следует, что  $R(\delta, g) \geq R(\delta^*, g)$ .

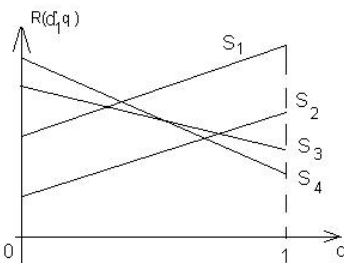


Рис. 1.8. Изменение среднего риска для правил, не учитывающих априорные вероятности

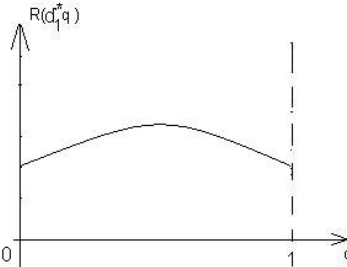


Рис. 1.9. Изменение среднего риска байесовского правила

Следовательно, все линейные зависимости  $R(\delta, g)$  пройдут либо выше  $R(\delta^*, g)$ , либо будут касательными к ней (рис. 1.10).

Рассмотрим подробнее решающее правило, средние потери которого являются касательной к функции  $R(\delta^*, g)$  в некоторой точке  $g = g_1$ . Очевидно, это решающее правило является байесовским для конкретных априорных вероятностей  $P_1 = g_1$  и  $P_0 = 1 - g_1$ , что и изображено на рис. 1.10. Из рисунка следует, что проигрыш фиксированного байесовского правила  $\delta$  может оказаться большим, если априорная вероятность  $g$  значительно изменится по сравнению с  $g_1$ , для которого оба правила совпадают.

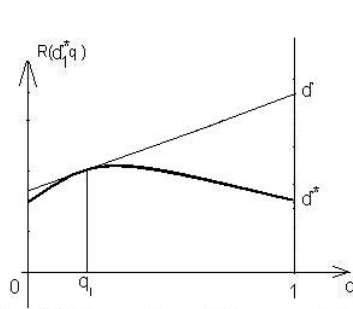


Рис. 1.10. Средний риск байесовского правила и правила для  $q = q_1$

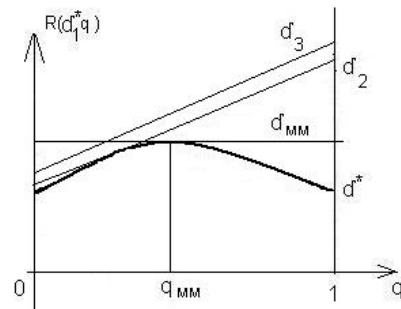


Рис. 1.11. Средний риск минимального правила

Если выбрать байесовское решающее правило, рассчитанное на самую неблагоприятную априорную вероятность  $g_{MM}$ , то получим минимальное решающее правило  $\delta_{MM}$  (рис. 1.11). действительно, как видно из рисунка 1.11, любое правило, например правило  $\delta_3$ , имеет  $R_{\max}(\delta_3, g)$  больший, чем  $R(\delta_{MM})$ .

Поскольку тангенс угла наклона  $R(\delta_{MM}, g)$  равен нулю, получаем следующий признак минимаксного решающего правила:

$$r_1 = r_0 \quad (1.55)$$

т. е. правило будет минимаксным, если его условные средние риски одинаковы.

#### 1.4. КРИТЕРИЙ НЕЙМАНА-ПИРСОНА

Во многих практически важных задачах вызывает затруднение не только определение априорных вероятностей  $P_0$  и  $P_1$ , но и назначение матрицы штрафов. В этих случаях для определения наилучшего решающего правила можно было бы пойти по пути развития методики минимаксного критерия, т. е. характеризовать качество решающего правила максимальным значением средних потерь и отбирать как наилучшее то правило, для которого это максимальное значение – наименьшее. Но при отыскивании наихудших условий работы решающего правила теперь надо осуществить перебор и по возможным (представляющим интерес) матрицам потерь. Такая методика будет слишком громоздка и при значительной неопределенности относительности матрицы штрафов вряд ли целесообразна.

Большой интерес представляет другая методика – критерий Неймана-Пирсона. В этой методике для сравнения качества работы решающих правил используют не одно число (средние потери, максимальное значение средних потерь), а два числа – условные вероятности ошибочных решений  $P(\gamma_1 / H_0)$  и  $P(\gamma_0 / H_1)$ . Эти две вероятности косвенно характеризуют возможные потери за неправильное решение.

Но при сравнении решающих правил с помощью указанных вероятностей возможно противоречие, когда, например, вероятность  $P(\gamma_1 / H_0)$  неправильного принятия первой гипотезы для одного решающего правила меньше, чем для конкурирующего правила, а вероятность  $P(\gamma_0 / H_1)$  больше, чем для конкурирующего. Для исключения подобных противоречий, при сравнении решающих правил оговаривают допустимую величину одной из вероятностей наилучшего решающего правила, например  $P(\gamma_1 / H_0) \leq c$ , и ведут отбор по оставшейся вероятности ошибочного решения.

Какую вероятность зафиксировать, а по какой производить отбор решающих правил – диктуется особенностями конкретной решаемой задачи. В таких условиях наилучшим решающим правилом, с точки зрения критерия Неймана – Пирсона, следует считать то, которое при величине вероятности ошибочного решения  $P(\gamma_1 / H_0)$  или  $P(\gamma_0 / H_1)$ , не более заданной, обеспечивает минимальное значение другой вероятности  $P(\gamma_0 / H_1)$  или  $P(\gamma_1 / H_0)$ .

Типичным примером обсуждаемой ситуации служит задача радиолокационного обнаружения объекта. В этой задаче гипотеза  $H_1$  – это предположение о том, что объект есть; гипотеза  $H_0$  полагает, что цели нет. Вероятность  $P(\gamma_1 / H_0)$  принять первую гипотезу, когда она не верна, называется вероятностью ложной тревоги и обозначается  $\alpha$ . Вероятность  $P(\gamma_0 / H_1)$  ошибочного принятия нулевой гипотезы называется вероятностью пропуска объекта и обозначается  $\beta$ .

Какую из двух вероятностей ошибок  $\alpha$  и  $\beta$  зафиксировать при выборе наилучшего правила? Как правило нужно принять решение о наличии объекта не в одной какой-либо точке пространства, а в некоторой области. Элемент пространства, занимаемый им, много меньше объема всей области, в

которой может находиться цель. Следовательно, большие потери, связанные с необнаружением сигнала объекта, могут встретиться гораздо реже, чем потери за «ложную тревогу» от других элементов пространства. По этой причине при выборе решающего правила фиксируется именно вероятность ложной тревоги и предпочтение отдается тому правилу, для которого вероятность пропуска  $\beta$  минимальна или вероятность правильного обнаружения  $1 - \beta$  максимальна.

Дальнейшее обоснование вида наилучшего правила решения с точки зрения критерия Неймана-Пирсона будет проводиться в терминах задачи радиолокационного обнаружения.

Итак, разделение области  $\Omega$  наблюдаемых сигналов на подобласти  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  надо произвести так, чтобы  $1 - \beta$  было максимальным, а  $\alpha$  не более заданной величины, например  $c$ .

Как следует из ранее изложенного,  $1 - \beta$  и  $\alpha$  можно определять соотношениями

$$1 - \beta = 1 - \int_{\Omega_0} W(\bar{y}/H_1) d\bar{y} = \int_{\Omega_1} W(\bar{y}/H_1) d\bar{y} = \int_{\Omega_1} \frac{W(\bar{y}/H_1)}{W(\bar{y}/H_0)} W(\bar{y}/H_0) d\bar{y}.$$

и

$$\alpha = \int_{\Omega_1} W(\bar{y}/H_0) d\bar{y}$$

Из этих соотношений видно, что включение произвольной наблюдаемой выборки  $\bar{y}$  в область  $\Omega_1$  увеличивает вероятность ложной тревоги и правильного обнаружения на  $W(\bar{y}/H_0) d\bar{y}$  и

$\frac{W(\bar{y}/H_1)W(\bar{y}/H_0)d\bar{y}}{W(\bar{y}/H_0)}$  соответственно.

Следовательно методику выбора правила решения (выбора областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ ), наилучшего с точки зрения критерия Неймана – Пирсона, можно формировать следующим образом. Правило будет наилучшим, если в область  $\Omega_1$  в первую очередь включить сигнальные точки  $\bar{y}$ , для которых их относительный вклад в вероятность правильного обнаружения максимален, т. е. из всех возможных точек пространства наблюдений отбирают те сигнальные точки  $\bar{y}$ , для которых  $\lambda(\bar{y})$  максимален.

Эти точки включают в  $\Omega_1$ ; если при этом сумма всех значений  $W(\bar{y}/H_0) d\bar{y}$  не превышает заданной величины  $c$ , то из оставшихся точек снова отбирают те, которым соответствует максимальное значение  $\lambda(\bar{y})$  и снова следят за величиной  $\alpha$ , не допуская неравенства  $\alpha > c$ . Так продолжают до тех пор, пока  $\alpha$  не достигнет  $c$ . При этом все  $\bar{y}$ , для которых  $\lambda(\bar{y}) > \eta$ , где  $\eta$  – некоторое число, оказываются в области  $\Omega_1$  и  $\alpha \leq c$ . Это и определяет решающее правило:

$$\lambda(\bar{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \eta \quad (1.56)$$

или

$$\ln \lambda(\bar{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{><}} \ln \eta \quad (1.57)$$

из (1.56) и (1.57) следует, что полученное оптимальное правило по критерию Неймана – Пирсона, так же, как и байесовское правило, сравнивает отношение правдоподобия с некоторым порогом  $\eta$ . Как теперь находить пороговое значение  $\eta$ ? Для этого вспомним, что вероятность ложной тревоги  $\alpha$  можно определить из соотношения вида

$$\alpha = \int_{\eta}^{\infty} W(\lambda/H_0) d\lambda$$

или

$$\alpha = \int_{\ln \eta}^{\infty} W(\ln \lambda/H_0) d(\ln \lambda).$$

где  $W(\lambda/H_0)$  – плотность распределения вероятностей значения отношения правдоподобия при выполнении гипотезы  $H_0$ .

Отсюда видим, что при заданной величине  $\alpha = c$  и известной плотности  $W(\lambda / H_0)$  следует определить нижний предел интеграла – это и будет пороговое значение.

Рассмотренную методику построения решающего правила проиллюстрируем часто встречающейся на практике задачей обнаружения точно известного сигнала  $\bar{S}$  на фоне аддитивного гауссового белого шума с параметрами  $(0, \sigma)$ . Эта задача является частным случаем примера 2, рассмотренного в разделе 1.2, если только положить  $\bar{S}_1 = \bar{S}$  и  $\bar{S}_0 = 0$ . Поскольку, как отмечалось выше, правило (1.57) совпадает с байесовским правилом за исключением выбора порогового значения  $\eta$ , для нашей задачи можно использовать соотношения примера 2 раздела 1.2 для решающего правила и условных вероятностей ошибок, а именно, полагая в (1.32)  $\bar{S}_1 = \bar{S}$  и  $\bar{S}_0 = 0$ , получаем следующее правило обнаружения сигнала:

$$\sum_{k=1}^n y_k S_k \underset{H_0}{>}< \underset{H_1}{\sigma^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k^2}. \quad (1.58)$$

Порог  $\eta$  в последнем соотношении должен выбираться в соответствии с условием

$$\alpha \leq c, \quad (1.59)$$

где  $c$  - оговоренный уровень ложной тревоги,

Для вычисления вероятности ложной тревоги воспользуемся формулой (1.49)

$$\alpha = P(\gamma_1 / H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}\right), \quad (1.60)$$

где  $q = \sqrt{\frac{2\mathfrak{D}_s}{N_0}};$

$\Phi$  - интеграл вероятности.

В свою очередь, вероятность правильного обнаружения  $1 - \beta$  может быть вычислена с помощью соотношения (1.50)

$$1 - \beta = P(\gamma_0 / H_1) = 1 - \Phi\left(-\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}\right). \quad (1.61)$$

По заданной ложной тревоге  $c$ , отношению сигнал/шум  $q$  с помощью соотношений (1.58) и (1.60) и таблиц интеграла вероятности можно определить значение порога:

$$1 - \Phi\left(\frac{q}{2} + \frac{\ln \eta}{q}\right) = c. \quad (1.62)$$

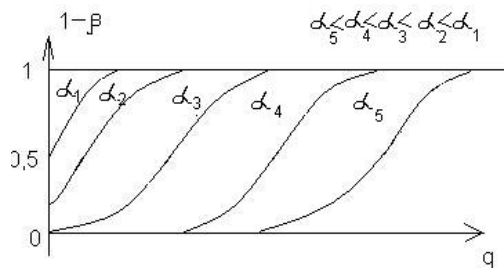


Рис. 1.12. Характеристика обнаружения

На рис. 1.12 представлено семейство зависимостей вероятности правильного различения  $1 - \beta$  от отношения сигнал/шум, называемых характеристиками обнаружения. Параметром семейства является вероятность ложной тревоги  $\alpha$ .

### 1.5 СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ СИГНАЛА В БЕЛОМ ШУМЕ

Все рассмотренные ранее алгоритмы различения сигналов основаны на использовании отношения правдоподобия. Обнаружение, как частный случай различения двух сигналов, когда один из них принимается «нулевым», в этом смысле не составляет исключения. Поэтому самой общей структурной схемой обнаружителя следует считать схему, состоящую из двух элементов – вычислителя отношения правдоподобия и сравнивающего устройства (см. рис. 1.2), о чем и говорилось в разделе 1.1. Однако элементы обнаружителя можно упростить, если использовать достаточную статистику. Как показано в разделе 1.4, при обнаружении известного сигнала в белом шуме решающее правило может быть построено в соответствии с выражением

$$\psi \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \psi_0; \quad (1.63)$$

$$\psi = \sum_{k=1}^n y_k S_k, \quad (1.64)$$

- достаточная статистика;

$$\psi_0 = \sigma^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k^2$$

- пороговое значение для достаточной статистики.

В этом случае структурная схема оптимального обнаружителя, изображенная на рис. 1.13, состоит из более простых элементов.

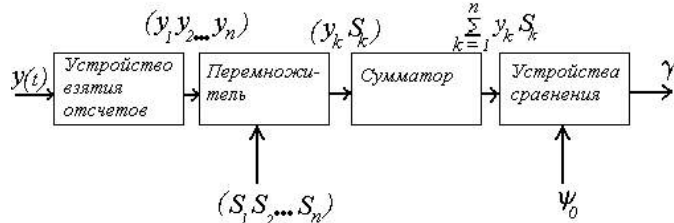


Рис. 1.13 Структурная схема оптимального обнаружения

Как видно из (1.64) достаточная статистика  $\psi$  соответствует значению взаимной корреляционной функции сигналов  $y(t)$  и  $S(t)$ , вычисленному в такой момент времени, когда учитывается все сигнальные отсчеты. Однако для вычисления значения взаимной корреляционной функции совсем не обязательно пользоваться отсчетами мгновенных значений. Для этого можно воспользоваться самими функциями. По этой причине выражение, определяющее достаточную статистику, можно представить в следующем виде:

$$\psi(\bar{y}) = K_0 \int_0^T y(t) S(t) dt, \quad (1.65)$$

где  $T$  - длительность обнаруживаемого сигнала;

$K_0$  - коэффициент пропорциональности.

Структурная схема оптимального обнаружителя непрерывного во времени сигнала, искаженного аддитивным белым шумом с известными параметрами, теперь уже будет состоять из перемножителя сигналов  $y(t)$  и  $S(t)$ , устройства усреднения (взятия интеграла) за время  $T$  с учетом коэффициента пропорциональности и схемы сравнения с пороговым значением  $\psi_1$ , изображенной на рис. 1.14.

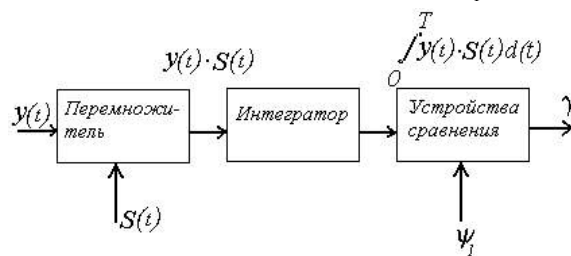


Рис. 1.14. Корреляционный обнаружитель

Устройства, работающие по такой схеме, называются оптимальными корреляционными обнаружителями. Общим свойством обоих упомянутых обнаружителей является то, что необходимо хранить в запоминающем устройстве ожидаемый сигнал  $S(t)$  или совокупность его сигнальных отсчетов  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . В тот момент времени, когда должен появиться принимаемый сигнал  $y(t)$ , из памяти устройства извлекается  $S(t)$  и подается на перемножающее устройство. Можно, однако, так построить обнаружитель, что отпадет необходимость использования такого запоминающего устройства. Это достигается применением согласованного фильтра. Как известно, любой линейный фильтр совершает операции, описываемые интегральной сверткой, т. е.

$$U_{\text{вых}}(\tau) = K \int_{-\infty}^{\tau} y(t) g(\tau - t) dt, \quad (1.66)$$

где  $U_{\text{вых}}(\tau)$  - сигнал на выходе линейного фильтра в момент времени  $\tau$ ;

$y(t)$  - входной сигнал фильтра;

$g(t)$  - импульсная характеристика фильтра;

$K$  - коэффициент пропорциональности.

Сопоставляя выражения (1.65) и (1.66), можно отметить, что они дадут один и тот же эффект, если при вычислении свертки интегрирование вести в пределах от 0 до  $T$ , а импульсную характеристику фильтра выбрать такой, чтобы выполнялось соотношение

$$S(t) = g(T - t).$$

В другой форме последнее выражение можно записать так:

$$g(t) = S(T - t). \quad (1.67)$$

это означает, что импульсная характеристика фильтра должна быть зеркальным отображением сигнала  $S(t)$  относительно оси симметрии, проходящей через точку  $T/2$ . Устройством, удовлетворяющим такому требованию, является, как известно, согласованный фильтр.

Таким образом, напряжение на выходе согласованного фильтра в момент времени  $T$ , т. е. при окончании сигнала, совпадает с величиной достаточной статистики. Следовательно, структурная схема оптимального обнаружителя в этом случае будет состоять из фильтра, согласованного с ожидаемым сигналом, временного селектора, пропускающего напряжение выхода согласованного фильтра в момент времени  $T$ , и устройства сравнения с пороговым значением. Такая схема изображена на рис. 1.15. рассмотрим работу этого оптимального обнаружителя на примере выделения из смеси с белым шумом видеоимпульса. Параметры последнего полностью известны (рис. 1.16).

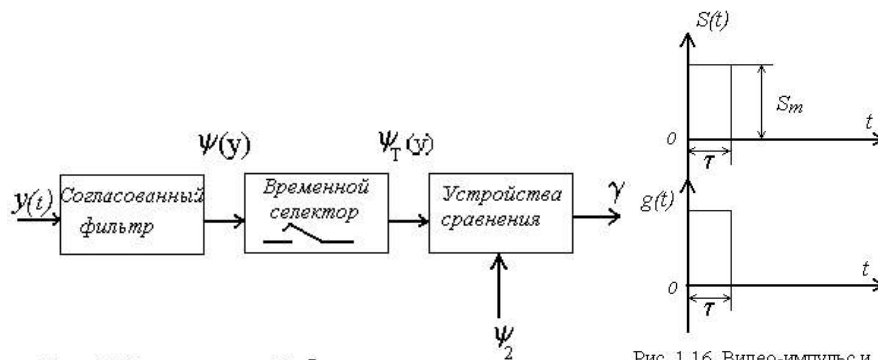


Рис. 1.15. оптимальный обнаружитель на согласованном фильтре

Рис. 1.16. Видео-импульс и импульсная характеристика фильтра, согласованного с ним

В соответствии с изложенным выше синтез обнаружителя начнем с поиска требуемой импульсной характеристики фильтра. Для этого необходимо найти зеркальное отображение входного сигнала. Ось отображения проходит через точку  $t = \frac{\tau}{2}$ , где  $\tau$  - длительность входного импульса. В силу симметрии входного сигнала импульсная характеристика фильтра полностью с ним совпадает, что и отображено на рис. 1.16. Структурная схема такого фильтра представлена на рис. 1.17.



Рис. 1.17. Структурная схема фильтра, согласованного с видеоимпульсом

Чтобы убедиться в том, что схема, представленная на рис. 1.17, действительно имеет требуемую импульсную характеристику, подадим на вход этой схемы  $\delta(t)$ -функцию. Выходное напряжение первого блока (рис. 1.18)-идеального интегратора – это единичный скачок. Затем это напряжение двумя путями – непосредственно ( $u_1$ ) и через линию задержки ( $u_2$ ), обеспечивающую задержку на  $\tau$ , поступает на вычитающее устройство. Выходное напряжение этого блока – разность напряжений  $u_1$   $u_2$  и является откликом устройства при подаче на его вход единичного импульса  $\delta(t)$ , т. е. импульсной характеристикой.

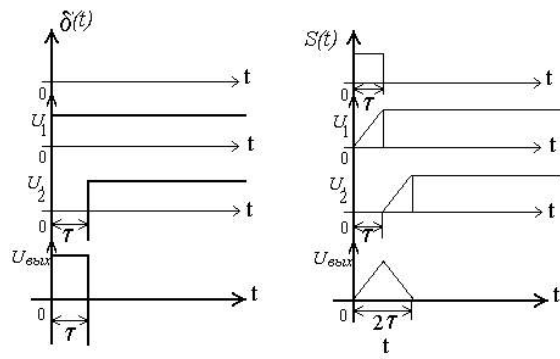


Рис. 1.18. к синтезу фильтра, согласованного с видеоимпульсом

Рассмотрим прохождение сигнала  $y(t)$ , являющегося аддитивной смесью видеоимпульса и белого шума, через согласованный фильтр. В схеме последнего, как известно, все составляющие спектра видеоимпульса приобретают дополнительный сдвиг по фазе такой величины, что сложение их в момент времени  $\tau$  происходит в фазе. На выходе фильтра при этом происходит увеличение напряжения, что поясняется рис. 1.18.

Спектральные составляющие шумовой части входного сигнала  $y(t) = S(t) + \xi(t)$ , помимо изменений по интенсивности, обусловленных частотной характеристикой фильтра, также получают фазовые сдвиги. Но величины их обусловлены свойствами видеоимпульса, а не шума. По этой причине сложение спектральных составляющих шума происходит не синфазно, а произвольно. Эта часть выходного напряжения фильтра изменяется случайно. Назовем то слагаемое выходного напряжения фильтра, которое определяется видеоимпульсом, детерминированной частью достаточной статистики  $\psi_{\text{дем}}(\tau)$ , а оставшуюся – случайной частью  $\psi_{\text{сл}}(\tau)$ . Обе части достаточной статистики определяются соотношением

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= K \int_0^{\tau} y(t) g(T-t) dt = K \int_0^{\tau} S(t) g(T-t) dt + \\ &+ K \int_0^{\tau} \xi(t) g(T-t) dt = \psi_{\text{дем}}(\tau) + \psi_{\text{сл}}(\tau). \end{aligned} \quad (1.68)$$

В разделе 1.4 подобная информация была получена теоретически. На рис. 1.19 изображены плотности вероятности значений  $\psi_{\text{дем}}$ ,  $\psi_{\text{сл}}$  и  $\psi_{\text{дем}} + \psi_{\text{сл}}$  в момент времени  $\tau = T$ . Таким образом, имеется полное соответствие теоретического и практического подходов к задаче выделения сигнала из смеси с былым шумом.

При необходимости синтеза фильтра, согласованного с одиночным радиоимпульсом, следует воспользоваться такой же методикой.

На рис. 1.20 изображены одиночный радиоимпульс и импульсная характеристика фильтра, согласованного с ним. В общем случае начальная фаза сигнала, соответствующего импульсной характеристике, должна определяться операцией зеркального отображения.

В данном примере для упрощения рассмотрения начальная фаза сигнала и число периодов частоты заполнения выбраны так, что импульсная характеристика совпадает с исходным сигналом. Схема фильтра, согласованного с одиночным радиоимпульсом, изображена на рис. 1.21. роль интегратора здесь выполняет резонансный контур.



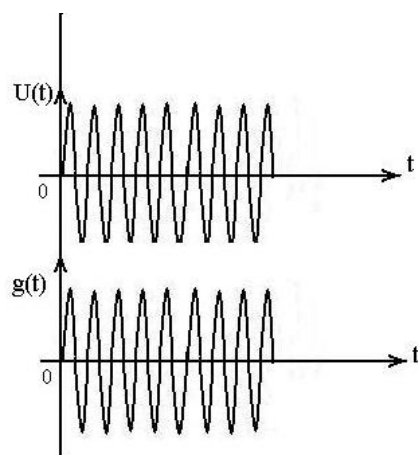


Рис. 1.20. Радиоимпульс и импульсная характеристика фильтра, согласованного с ним

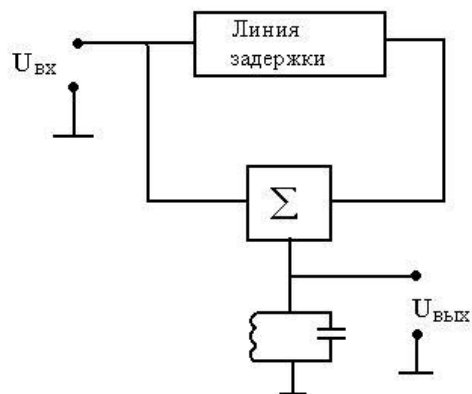


Рис. 1.21. Схема фильтра, согласованного с радиоимпульсом

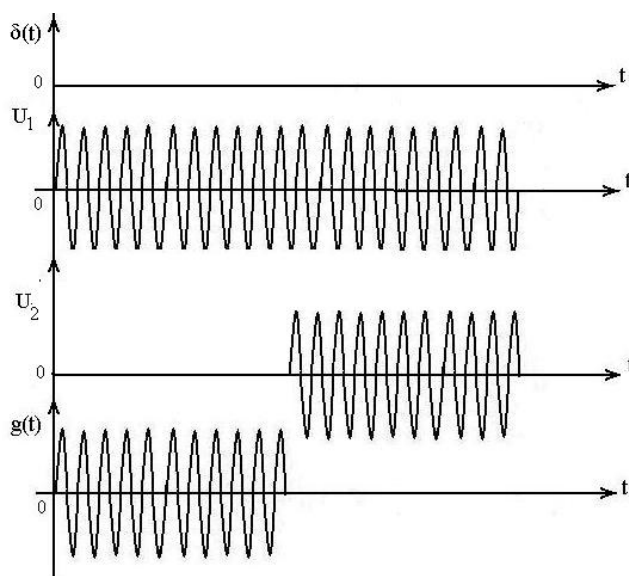


Рис. 1.22. Формирование импульсной характеристики фильтра, согласованного с радиоимпульсом

Рис. 1.22 поясняет процесс формирования сигнала на выходе схемы при подаче на вход единичного импульса. Последний ударно возбуждает колебания в контуре. Поскольку контур считается идеальным, то эти колебания без изменения сохранились бы бесконечно долго. Но тот же единичный импульс, пройдя через линию задержки, через интервал  $T$ , равный длительности сигнала, возбудит в контуре новые колебания, которые и погасят первые, что обеспечивается выбором  $T$ . Так будет сформирован сигнал, совпадающий с требуемой импульсной характеристикой.

При обнаружении видеосигналов произвольной формы для синтеза согласованных фильтров можно применить такую же методику. Другими словами, первоначально следует определить импульсную характеристику искомого фильтра, а затем уже синтезировать его схему. На рис. 1.23 изображен обнаруживаемый сигнал. Можно с допустимой погрешностью заменить его другим сигналом, составленным из элементарных видеоимпульсов.

Поскольку процедура синтеза фильтра, согласованного с одиночным импульсом, нам уже известна, то можно составить схему для всего сигнала так, как это изображено на рис. 1.24. принцип работы фильтра основан на использовании линии задержки с отводами через  $\tau$  и усилителей, коэффициенты передачи которых определены значением амплитуд соответствующих импульсов требуемой импульсной характеристики фильтра. Рис. 1.25 поясняет процедуру формирования импульсной характеристики фильтра при подаче на его вход  $\delta(t)$ - функции.

Если сигнал, подлежащий обнаружению, составлен из многих радиоимпульсов, отличающихся по своим параметрам, т. е. является сложным, то для синтеза фильтра, согласованного с ним, можно

применить ту же методику, которая была рассмотрена при обработке видеоимпульсов произвольной формы, т. е. попытаться представить его в виде набора элементарных сигналов.

На рис. 1.26 изображены сигнал, составленный из двух радиоимпульсов, отличающихся только начальной фазой, требуемая импульсная характеристика фильтра, согласованного с таким сигналом, и его структурная схема.

Можно провести синтез оптимального обнаружителя сигнала, составленного из радиоимпульсов с разными частотами заполнения. Это осуществляется аналогично тому, как представлено на рис. 1.27, для сигнала, состоящего из двух радиоимпульсов с разными частотами заполнения.

Рассмотренные примеры иллюстрируют возможности создания оптимальных обнаружителей сложных как видео-, так и радиоимпульсов, в том числе и фазоманипулированных, и частотномодулированных.

## 1.6 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

В разделе 1.4 рассматривалось решающее правило Неймана – Пирсона, качество решения которого характеризовалось вероятностями ложной тревоги и пропуска ( $\alpha, \beta$ ). Первая из этих характеристик фиксировалась (оговаривалась заранее). Для того чтобы и вторая характеристика не превосходила заданной величины, следовало время наблюдения  $T$  или объем выборки  $n$  выбрать так, чтобы обеспечить заданные  $\alpha$  и  $\beta$  (при фиксированном отношении сигнал/шум в одном отсчете).

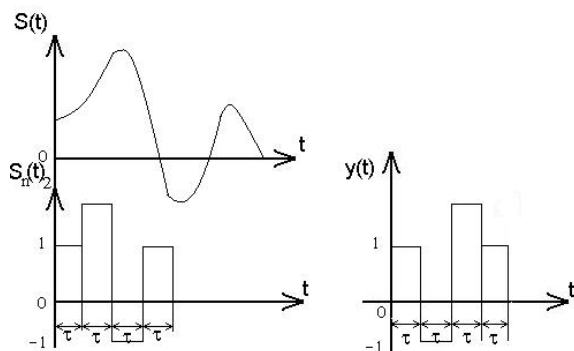


Рис. 1.23. Видеоимпульсы и импульсная характеристика фильтра, согласованного с ним.

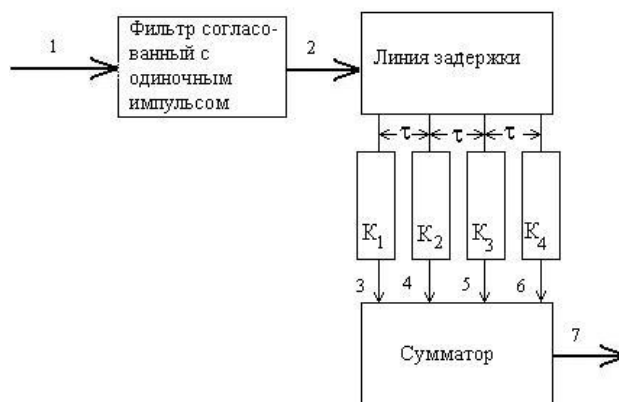


Рис. 1.24. Структурная схема фильтра для произвольного сигнала

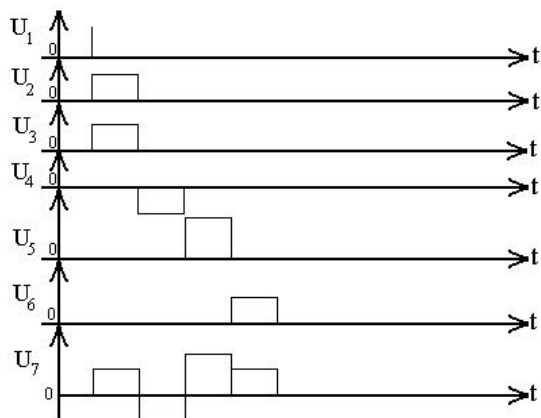


Рис. 1.25. Синтез фильтра, согласованного с видеоимпульсом

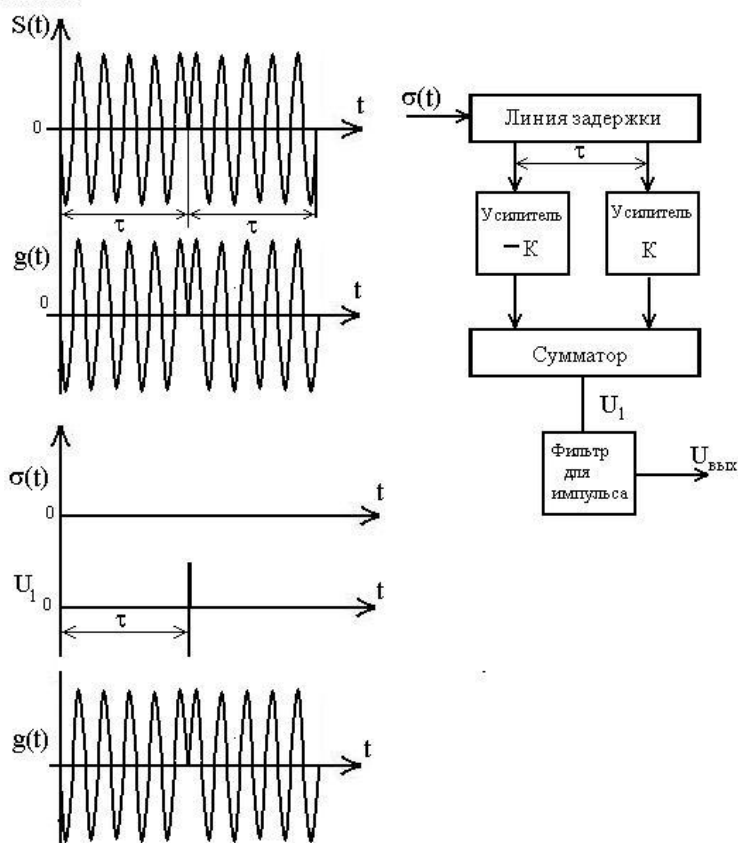


Рис. 1.26. Построение фильтра, согласованного с составным радиоимпульсом

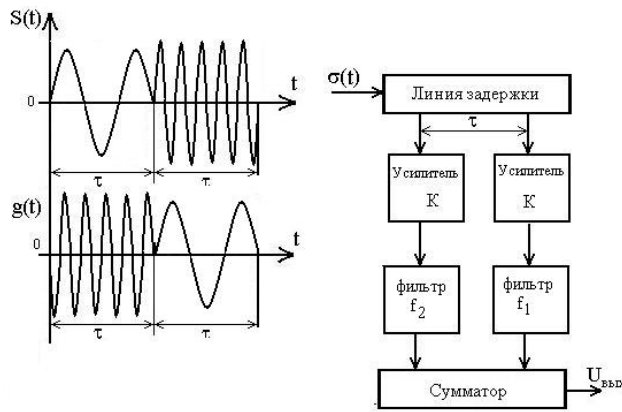


Рис. 1.27. Построение фильтра, согласованного со сложным радиосигналом

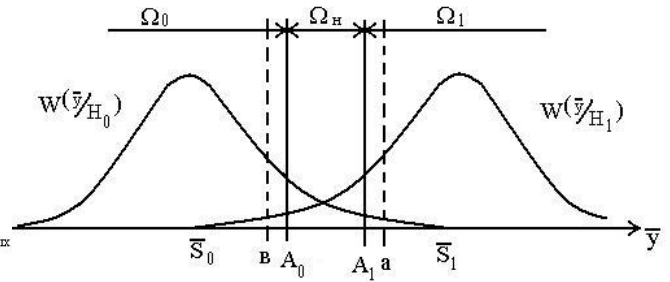


Рис. 1.28. Области решений последовательной процедуры

Например, по информационному каналу передается некоторое слово, причем для обеспечения заданного качества передачи требуется это слово повторить  $n$  раз. Это требуемое количество повторений можно определить по заданному качеству с помощью методики, изложенной в разделе 1.4.

Но ту же самую задачу можно решить несколько иначе. Действительно, передаваемый сигнал в каждом отсчете неодинаково искажается шумом. Может оказаться, что первые отсчеты конкретной наблюдаемой выборки мало искажаются и решение с заданным качеством можно попытаться принять раньше, даже после первой передачи. Если сразу же после первой передачи не удалось распознать слово с заданным качеством, то можно попытаться это сделать после повторения и т. д. Такая последовательная процедура принятия решения (по мере поступления информации) может существенно уменьшить необходимое число повторений.

Например, предположим, что в системе передачи имеется канал обратной связи. На приемном конце пытаются опознать слово по мере поступления информации. Как только наблюдатель поймет, какое слово передавалось, он посылает по каналу обратной связи подтверждение. И если слово принято правильно, на передающем конце линии приступают к передаче следующего слова и т. д. Можно привести и другие примеры целесообразности описанной методики. При этом в таких ситуациях можно принять решение в среднем раньше, чем это будет сделано в соответствии с методикой Неймана – Пирсона.

Указанная методика впервые предложена и разработана А. Вальдом [4].

Рассмотрим процедуру последовательного принятия решения подробнее. Поскольку при этом можно принимать решение после получения каждого нового отсчета, такое правило имеет дело не с одним пространством наблюдений фиксированного объема  $\Omega$ , как это было ранее, а со счетным множеством их.

Иными словами, если наблюдаемый сигнал состоит всего из одного отсчета, то его сигнальное пространство  $\Omega_1$  включает в себя все возможные сигналы объемом в один отсчет; если сигнал состоит из двух отсчетов, то он относится к пространству  $\Omega_2$ , содержащему все сигналы этого объема. Каждая область  $\Omega_n$  наблюдаемого сигнала  $\bar{y}(n)$  размерности  $n$  в соответствии с последовательным правилом разбивается на три области:  $\Omega_n$  - область принятия решения  $\gamma_1$  по сигналу объемом  $n$ ;  $\Omega_{0n}$  - область принятия решения  $\gamma_0$  по сигналу объемом  $n$ ;  $\Omega_{nn}$  - область неопределенности.

Рис. 1.28 иллюстрирует расположение областей для некоторого частного значения  $n$ , причем для простоты объемный чертеж заменен плоским. Как видно из рисунка, в область  $\Omega_{nn}$  включены те значения наблюдаемого сигнала, которые характеризуются отношением правдоподобия, мало отличающимся от единицы, т. е. включены точки, вносящие наибольший вклад в вероятность ошибочного решения.

Решающее правило последовательной процедуры записывается следующим образом

если  $\lambda_n(\bar{y}) \geq A_1$ , то принимается решение  $\gamma_1$ ;

если  $\lambda_n(\bar{y}) \leq A_0$ , то принимается решение  $\gamma_0$ ;

если же  $A_0 < \lambda_n(\bar{y}) < A_1$ , то решение не принимается и наблюдение продолжается, (1.69)

здесь  $\lambda_n(\bar{y})$  - значение отношения правдоподобия для выборки объемом  $n$ ;

$A_0, A_1$  - пороговые значения.

Конечно, объем выборки  $n$ , при котором происходит принятие решения, есть величина случайная. Однако Вальд показал, что в среднем объем выборки, необходимый для принятия решения последовательным правилом (1.69), будет меньшим, чем в правилах с фиксированными объемами. Кроме того, это решающее правило обеспечивает наименьший средний объем выборки среди всех других возможных последовательных правил.

Как же выбрать  $A_0$  и  $A_1$ , чтобы  $P(\gamma_1 / H_0) = \alpha$  и  $P(\gamma_0 / H_1) = \beta$  были не больше заданных величин? Для ответа на этот вопрос полезно ввести определение эффективной выборки. Будем называть выборку  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , по которой последовательное правило принимает решение на  $n$ -м шаге, эффективной, если она не включает в себя выборку меньшего объема  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , где  $m < n$ , по которой уже можно было бы принять решение в пользу  $H_0$  или  $H_1$ .

Предположим, что наблюдается эффективная выборка, по которой принимается решение  $\gamma_1$ . Это значит, что выполняется неравенство

$$W_n[y_1, y_2 \dots y_n / H_1] \geq A_1 W_n[y_1, y_2 \dots y_n / H_0]. \quad (1.70)$$

Проинтегрируем левую и правую части неравенства (1.70) по области  $\Omega_n$ , включающей в себя все эффективные выборки объема  $n$ , по которым может быть принято решение  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \dots \int W_n(y_1, y_2 \dots y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n &\geq \\ &\geq A_1 \int_{\Omega_n} \dots \int W_n(y_1, y_2 \dots y_n / H_0) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Левая часть неравенства – это вероятность принять решение  $\gamma_1$ , когда истинна гипотеза  $H_1$  по эффективным выборкам объема  $n$ ; в правой части находится интеграл, определяющий вероятность принять решение  $\gamma_1$  по тем же выборкам, когда истинна гипотеза  $H_0$ . Но это всего лишь части вероятностей правильного и ошибочного решений, учитывающие эффективные выборки размера  $n$ .

Для того чтобы найти полные условные вероятности вида  $P(\gamma_1 / H_1) = 1 - \beta$  и  $P(\gamma_1 / H_0) = \alpha$ , необходимо учесть эффективные выборки всех возможных объемов, приводящие к решению  $\gamma_1$ . Это можно осуществить суммированием по  $n$  в левой и правой частях неравенства (1.71), т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n &\geq \\ &\geq A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (1.72)$$

в левой части неравенства (1.72) находится выражение, определяющее вероятность  $P(\gamma_1 / H_1)$  принять правильное решение, а в правой – ошибочное  $P(\gamma_1 / H_0)$ . Отсюда получается соотношение, характеризующее пороговое значение,

$$A_1 \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad (1.73)$$

которое определяет верхнюю границу  $\frac{1 - \beta}{\alpha}$  порога  $A_1$ .

Для определения порога  $A_0$  следует аналогично рассмотреть эффективные выборки, приводящие к принятию решения  $\gamma_0$ :

$$W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_1) \leq A_0 W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_0). \quad (1.74)$$

После учета эффективных выборок всех возможных объемов, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_1) dy_1 dy_2 \dots dy_n &\leq \\ &\leq A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} W_n(y_1 y_2 \dots y_n / H_0) dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Здесь, как и ранее,  $\Omega_{0n}$  включает в себя все эффективные выборки объема  $n$ , приводящие к принятию решения  $\gamma_0$ . Левая часть неравенства (1.75) – это вероятность принятия решения  $\gamma_0$  при условии истинности гипотезы  $H_1$ ; интеграл правой части определяет вероятность принятия решения  $\gamma_0$  при истинности гипотезы  $H_0$ .

Таким образом, (1.75) можно переписать в виде

$$\beta \leq A_0(1-\alpha),$$

отсюда находится нижняя граница для порога  $A_0$ :

$$A_0 \geq \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad (1.76)$$

Итак, хотя анализ и не дал истинных значений порогов, удалось найти их границы: верхнюю для  $A_1$  и нижнюю для  $A_0$ . Практически можно в качестве порогов принять найденные границы. Вместо порога  $A_1$  берут  $\alpha = \frac{1-\beta}{\alpha}$ ,  $A_0$  заменяют  $b = \frac{\beta}{1-\alpha}$ . Из Рис. 1.28 видно, что такая замена приводит к уменьшению вероятностей ошибок по сравнению с заданными  $\alpha$  и  $\beta$ . Но, как показал Вальд [4], при малых  $\alpha$  и  $\beta$  эти изменения незначительны.

После решения вопроса о величинах порогов необходимо оценить объем выборки, по которой в среднем принимает решение последовательное правило. Предположим, что отсчеты наблюдаемого сигнала независимы. Тогда условия принятия решения в (1.69) удобнее записать в следующем виде:

$$\text{Если } \sum_{i=1}^n z_i \geq \ln A_1, \text{ принимается решение } \gamma_1; \quad (1.77)$$

$$\text{Если же } \sum_{i=1}^n z_i \leq \ln A_0, \text{ принимается решение } \gamma_0,$$

где

$$z_i = \ln \frac{W[y_i / H_1]}{W[y_i / H_0]}. \quad (1.78)$$

Число слагаемых в сумме  $\sum_{i=1}^n z_i$ , при котором впервые выполняется одно из соотношений (1.77) (принимается одно из решений  $\gamma_1$  или  $\gamma_0$ ) и определяется объем выборки для данного опыта (для конкретной наблюдаемой выборки  $y$ ).

К сожалению, даже при независимости отсчетов обрабатываемого сигнала не удастся получить аналитического выражения, определяющего средний объем выборки в общем случае. Такое аналитическое выражение можно получить для частного случая – обнаружения постоянного напряжения на фоне нормальных помех с независимыми отсчетами. Вальдом показано, что если среднее значение величины  $z_i$  не зависит от индекса  $i$  и  $M\left[\sum_{i=1}^n z_i\right]$  конечно (последнее равносильно утверждению о том, что рано или поздно решение будет принято), то средний объем выборки  $M[n]$  связан со средним значением  $M\left[\sum_{i=1}^n z_i\right]$  следующим соотношением:

$$M[n] = \frac{M\left[\sum_{i=1}^n z_i\right]}{M[z]}. \quad (1.79)$$

Расчеты, проведенные по формуле (1.79), показывают, что по сравнению с правилом, работающим в соответствии с критерием Неймана-Пирсона, последовательная процедура обеспечивает выигрыш по объему выборки в среднем на 30 ÷ 40%.

## 1.7 ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОМЕХОВОЙ ОБСТАНОВКИ

Рассмотренные методы обработки сигналов, оптимальные по тому или иному критерию, получены в предположении, что статистические характеристики помехи известны заранее и известны точно. Априорная трудность, о которой уже шла речь в разделах о минимаксном критерии и о критерии Неймана-Пирсона, касалась лишь неопределенных вероятностей появления сигналов и неопределенности в назначении матрицы штрафов.

В реальных условиях помеховая обстановка не остается неизменной, что в значительной мере затрудняет практическое приложение рекомендаций теории. Дело в том, что предполагаемые характеристики помехи существенно входят в структуру оптимального алгоритма. Так, например, предположение о нормальном законе распределения помехи и независимости ее отсчетов привело к структуре обнаружителя в виде коррелятора (или согласованного фильтра); априорное значение дисперсии шума входит в величину оптимального порога для всех критериев.

Может оказаться, что схема обработки, построенная в соответствии с оптимальным алгоритмом совершенно не работоспособна в условиях, отличающихся от предполагаемых. Поэтому необходимо расширить постановку теоретической задачи, предусмотрев возможную неопределенность и изменчивость статистических характеристик помехи. Эта задача чрезвычайно трудна и до сих пор полностью не решена: есть лишь более или менее успешные продвижения по отдельным направлениям. Одно из направлений основывается на предположении, что закон распределения помехи известен, но не полностью, а лишь с точностью до неизвестных параметров. Например, известно, что распределение помехи нормальное, однако интенсивность ее может быть любой:

$$W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}, 0 < \sigma < \infty \quad (1.80)$$

Более сложный пример: известно, что помеха – стационарный гауссов процесс с корреляцией между отсчетами, действующей не более, чем на интервале  $\tau_k = m\Delta t$  (т. е. взаимосвязь простирается не более, чем на  $m$  отсчетов). Такая помеха описывается  $m$ -мерной гауссовской плотностью  $W_m(\xi)$  с корреляционной матрицей  $\|R\|$ ; однако элементы матрицы заранее неизвестны.

Третий пример: известно, что закон распределения помехи может быть либо гауссовым, либо лапласовым и при этом неизвестен параметр  $\sigma$ :

$$W(\xi) = \begin{cases} 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} \\ 2) \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|\xi|}{\sigma}} \end{cases}, 0 < \sigma < \infty. \quad (1.81)$$

Эти примеры относятся к так называемым параметрическим задачам или, точнее, к задачам с параметрической неопределенностью. Для параметрических задач характерно то, что если удастся так или иначе найти неизвестные параметры реально действующей помехи, то закон распределения идентифицируется указанием параметров.

Так, в первом примере достаточно найти  $\sigma$ , и задача сводится к рассмотренным ранее с точно известным законом распределения помехи. Во втором примере для идентификации распределения нужно узнать  $m$  параметров – значений корреляционной функции при сдвигах  $\Delta t, 2\Delta t \dots m\Delta t$ , определяющих матрицу  $\|R\|$ . В третьем примере для идентификации нужны два параметра: индекс 1), 2), указывающий вид такого распределения, и значение  $\sigma$ .

Другое направление предусматривает еще более широкую постановку задач, когда сам вид закона распределения помехи не известен. Делаются предположения лишь о некоторых характерных чертах помехи, которым может отвечать целый класс разных распределений, например: симметрия закона распределения, равновероятность положительных и отрицательных значений помехи и т. п.

Пример такой постановки задачи. Требуется обнаружить детерминированный сигнал  $\bar{S} = (S_1, S_2 \dots S_n)$  на фоне помех с неизвестным распределением. Относительно помехи предполагается лишь, что положительные и отрицательные значения помехи одинаково вероятны. В терминах статистической теории решений задача ставится так: требуется по наблюдаемой выборке  $\bar{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)$  проверить две гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ .

Гипотеза  $H_0$ : наблюдаемая выборка подчиняется закону распределения  $W_{n0}(\bar{y}) = \prod_{i=1}^n W_{oi}(y_i)$ , причем сомножители относятся к классу  $K_0$  распределений, отличающихся нулевым значением медианы  $y_M = 0^*$ .

Гипотеза  $H_1$ : закон распределения  $W_{n1}(\bar{y}) = \prod_{i=1}^n W_{1i}(y_i)$ , причем сомножители имеют медианы, изменяющиеся по закону ожидаемого сигнала  $y_{Mi} = S_i$ .

Характерной чертой задач такого рода является то, что идентификация закона распределения  $W(y)$  из класса  $K_0$  не сводится к указанию параметров, так как различных законов, входящих в  $K_0$ , бесчисленное множество. Подобные задачи называются задачами с непараметрической неопределенностью, или непараметрическими задачами.

\* Напомним, что медиана разбивает площадь под кривой  $W(\bar{y})$  пополам:

$$\int_{-\infty}^{y_M} W(y) dy = \int_{y_M}^{\infty} W(y) dy = 1/2.$$

Алгоритмы, предложенные для решения параметрических задач, в большинстве случаев основаны на следующем. Исходя из известной формы закона распределения помехи определяется структура алгоритма с точностью до некоторых коэффициентов, которые зависят от неизвестных параметров помехи. Наблюдаемая выборка  $\bar{y}$  вначале подвергается некоторой статистической обработке, в результате которой вырабатываются оценки (приближенные значения) неизвестных параметров. По ним вычисляются коэффициенты, необходимые для «настройки» алгоритма. Когда алгоритм настроен, в него подают запомненные в оперативной памяти значения выборки  $y$ .

Как видим, отличие от алгоритмов с точно известной помехой состоит только в этапе нахождения оценок параметров, и центральными вопросами ставятся вопросы о точности оценки, о длине выборки для получения необходимой точности оценки, о запаздывании в принятии решения. В зависимости от конкретных условий работы могут быть предложены различные пути решения этих проблем.

В некоторых случаях оказывается, что неизвестные параметры помехи влияют на выбор порога  $\eta$ , но не влияют на структуру вычисления достаточной статистики. В этом случае запоминание выборки  $\bar{y}$  и задержка в работе алгоритма не нужна: вычисление достаточной статистики и вычисление оценок параметров помехи можно проводить параллельно.

Таков, например, алгоритм Стьюдента, позволяющий обнаружить сигнал с одинаковыми отсчетами в нормальном шуме с неизвестной дисперсией. Достаточная статистика – корреляционная сумма.

$$\psi = \sum_k y_k,$$

может быть вычислена независимо от неизвестной дисперсии помехи.

Поскольку все отсчеты детерминированного сигнала одинаковы  $S_1 = S_2 = \dots = S_n$ , достаточная статистика может быть еще упрощена:

$$\psi' = \sum_k y_k,$$

Оценка  $\sigma^*$  неизвестного параметра  $\sigma$  вычисляется через отсчеты выборки  $\bar{y}$  по известной формуле

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_k (y_k - \langle y \rangle^*)^2}{n-1}} \quad (1.82)$$

где  $\langle y \rangle^*$  - оценка среднего значения,

$$\langle y \rangle^* = \frac{\sum_k y_k}{n}. \quad (1.83)$$

Пороговое значение  $\eta$  определяется после нахождения  $\sigma^*$ :

$$\eta = \sigma^* n S_t^{-1}(1 - \alpha), \quad (1.84)$$

где  $S_t^{-1}(z)$  - функция, обратная интегральному закону Стьюдента;

$\alpha$  - заданная вероятность ложной тревоги.

В ряде задач, исходя из практических условий работы, может быть предусмотрен режим предварительного «обучения». До поступления сигнала  $\bar{y}$ , по которому требуется принимать решение, имеется возможность наблюдать некоторую обучающую выборку  $\bar{X}$ , по которой производится вычисление параметров – настройка алгоритма. Желательно, чтобы было известно, какой именно гипотезе соответствует обучающая выборка. Этот случай называют обучением по классифицированной выборке, или обучением с учителем. Однако возможно обучение и по неклассифицированной выборке (обучение без учителя).

Так или иначе, рассматриваемый путь решения задачи связан с тем, что алгоритм допускает подстройку под реально действующую помеху, - адаптацию к изменяющейся помеховой обстановке.

Другой путь, рассматриваемый обычно в связи с непараметрическими задачами, преследует иную цель: найти алгоритм, нечувствительный в известном смысле к изменению помехи. Не следует, однако, понимать это так, что все характеристики качества алгоритма не зависят от помехи, и алгоритм одинаково работает при любых помехах.

В настоящее время непараметрические методы рассматриваются в основном применительно к задаче обнаружения сигнала в шумах при условии, что появление сигнала – редкое событие по сравнению с непоявлением сигнала. В этих условиях подавляющее число ошибочных решений падает на ошибки типа ложных тревог. Распространены термины «непараметрический» алгоритм, «непараметричность» алгоритма. Под этим понимается, что алгоритм обеспечивает постоянную вероятность ложных тревог при изменении не только параметров помехи, но и более того, - при изменении не только параметров помехи (в пределах оговоренного класса  $K_0$ ).

Вторая основная характеристика качества – вероятность правильного обнаружения – остается зависящей от конкретного вида помех и от отношения сигнал/шум. Вопрос об оптимальности алгоритма в этих условиях довольно сложен. Как правило, не найдены доказательства того, что тот или иной алгоритм является оптимальным (наилучшим из всех возможных) при любом виде помех и при любых отношениях сигнал/шум. Иногда удается доказать более слабое положение: оптимальность при малых отношениях сигнал/шум, так называемую локальную оптимальность алгоритма.

Для оценки непараметрических алгоритмов предложена следующая методика, основанная на сравнении рассматриваемого алгоритма с другим, хорошо известным.

1. Берутся какие-либо частные законы распределения помехи входящие в рассматриваемый класс; обычно выбирают такие законы распределения, для которых сравнительно легко провести анализ: нормальный, лапласов, релеевский и т. п.

2. Задаются вероятностью ложной тревоги  $\alpha$ , вероятностью пропуска  $\beta$ , отношением сигнал/шум  $q$  для одного отсчета сигнала.

3. Определяют объемы выборки (количество отсчетов)  $n_1$  и  $n_2$ , необходимые для получения заданных  $\alpha$  и  $\beta$  в одном и другом сравниваемых алгоритмах. Чем меньше длина выборки, тем эффективнее алгоритм. Поэтому коэффициент относительной эффективности алгоритма  $\delta_1$  относительно алгоритма  $\delta_2$  определяют как отношение

$$(\mathcal{EO})_{\delta_1/\delta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.85)$$

Отношение (1.85) зависит от всех заданных величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $q$ , что вынуждает проводить многочисленные расчеты и строить зависимости  $\mathcal{EO} = f(\alpha, \beta, q)$ . Хотелось бы иметь более компактную характеристику эффективности.



Оказывается, что если устремить  $q \rightarrow 0$ ;  $n_1 \rightarrow \infty$ ;  $n_2 \rightarrow \infty$ , то отношение (1.85) стремится к некоторому пределу, не зависящему ни от  $\alpha$ , ни от  $\beta$ . Получаемое таким образом число называется коэффициентом асимптотической относительной эффективности АОЭ:

$$(AOЭ)_{\delta_1/\delta_2} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.86)$$

Несмотря на очевидную неполноту оценки качества вычислением АОЭ для отдельных частных распределений, эта методика дает все же представление о достоинствах или недостатках изучаемого алгоритма.

Обычно приводят сравнение изучаемого алгоритма с алгоритмом, оптимальным для частного алгоритма с алгоритмом, оптимальным для частного случая гауссова шума (корреляционным алгоритмом). Понятно, что АОЭ получается меньше единицы и оценивает сравнительный проигрыш. Затем проводят сравнение в условиях негауссова шума, когда корреляционный алгоритм не оптимален. Коэффициент АОЭ может получиться и больше единицы, что свидетельствует о выигрыше изучаемого алгоритма в обнаружении слабых сигналов на фоне негауссовской помехи.

В качестве примера непараметрического алгоритма рассмотрим знаковый обнаружитель известного сигнала. Алгоритм использует знаковую функцию

$$Sign(y) = \begin{cases} +1 & \text{при } y \geq 0 \\ -1 & \text{при } y < 0 \end{cases} \quad (1.87)$$

Последовательность отсчетов наблюдаемой выборки  $y$  преобразуется в  $\bar{z}$ :

$$Z_k = Sign y_k$$

представляющую собой последовательность 1 и -1. После этого производится умножение на отсчеты ожидаемого сигнала  $S_k$  и суммирование. Полученная статистика

$$\psi_{zn} = \sum_k S_k Z_k = \sum_k S_k Sign y_k \quad (1.88)$$

сравнивается с порогом  $\eta$ , устанавливаемым по заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$ .

Этот алгоритм обладает свойством непараметричности по отношению к классу распределений помех с нулевой медианой. Гипотеза  $H_0$ : распределение  $W(y/H_0)$  такое, что

$$P(y \geq 0) = \frac{1}{2}; \quad P(y < 0) = \frac{1}{2}. \quad (1.89)$$

итак, в отсутствие сигнала положительные и отрицательные отсчеты равновероятны при любом виде помехи (из оговоренного класса). Поэтому в последовательности  $\bar{z}$  появление +1 и -1 равновероятно. Каждое из слагаемых типа  $S_k Z_k$  с равной вероятностью принимает значение  $+S_k$  или  $-S_k$ .

Математическое ожидание и дисперсия статистики  $\psi_{zn}$  равны соответственно

$$M(\psi_{zn}/H_0) = \sum_k \left( +S_k \frac{1}{2} - S_k \frac{1}{2} \right) = 0; \quad (1.90)$$

$$D(\psi_{zn}/H_0) = \sum_k \left[ S_k^2 \frac{1}{2} + (-S_k)^2 \frac{1}{2} \right] = \sum_k S_k^2. \quad (1.91)$$

Нетрудно понять, что не только моменты, но и сам вид закона распределения статистики  $P(\psi_{zn}/H_0)$  не зависит от распределения помехи, так как после проведения операции  $Sign(y_k)$  закон распределения помехи преобразуется в два значения  $P(z=1) = \frac{1}{2}$  и  $P(z=-1) = \frac{1}{2}$ , одинаковых при любых помехах.

Вид закона распределения  $P(\psi_{zn}/H_0)$  можно найти, зная конкретные значения отсчетов детерминированного сигнала  $\bar{S}$ . Наиболее прост случай, когда все отсчеты сигнала одинаковы по модулю (без потери общности их можно считать равными  $\pm 1$ ). В этом случае статистика  $\psi_{zn}$  может принимать только целочисленные значения от  $-n$  до  $+n$ ; ее закон распределения можно свести к биномиальному.

Как известно, биномиальный закон распределения

$$b(n, k, P) = \binom{n}{k} p^k (1 - P)^{n-k}$$

определяет вероятность того, что в последовательности нулей и единиц длиной  $n$  появится ровно  $k$  единиц, если вероятность появления единицы есть  $P$ .

В нашем случае последовательность состоит не из нулей и единиц, а из +1 и -1, а интерес представляет значение суммы всех членов последовательности. Путем несложных рассуждений можно получить:

$$P(\psi_{zn} = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

При большом числе отсчетов  $n$  биномиальный закон близок к нормальному с параметрами, определенными (1.90), (1.91):

$$M = 0; \quad \sigma^2 = n.$$

Зная закон распределения, нетрудно вычислить значение порога  $\eta$ , соответствующего заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$ . При наличии сигнала (гипотеза  $H_1$ ) закон распределения отсчетов наблюдаемого сигнала смещается: для тех номеров  $k$ , при которых отсчеты сигнала  $S$  положительны, смещение  $W(y_k / H_1)$  происходит вправо и вероятность получить положительный отсчет  $P(y_k \geq 0) > \frac{1}{2}$ .

Аналогично, для номеров  $k$ , при которых  $S_k < 0$ , смещение  $W(y_k / H_1)$  идет влево и  $P(y_k < 0) > \frac{1}{2}$ .

В последовательности  $\bar{Z}$  на тех позициях, где  $S_k > 0$ , будут наблюдаться +1 чаще, чем -1; на позициях, где  $S_k < 0$ , чаще будут наблюдаться -1 и реже +1. Поэтому статистика  $\psi_{zn}$  стохастически сместится в сторону положительных значений и будет чаще превосходить порог  $\eta$ . Количественные соотношения зависят и от отношения сигнал/шум, и от конкретного вида помехи.

Относительную эффективность знакового обнаружителя по сравнению с оптимальным (для гауссовых помех) обнаружителем корреляционного типа можно определить по методике, описанной выше. Расчеты показывают, что в гауссовых помехах

$$(AOЭ)_{\delta_{zn} / \delta_{кор}} \cong 0,637$$

Если же помеха лапласова, то

$$(AOЭ)_{\delta_{zn} / \delta_{кор}} = 2.$$

Эти примеры показывают, что по вероятности обнаружения знаковый алгоритм в некоторых случаях уступает корреляционному, в других превосходит его. Но главное в том, что знаковый алгоритм сохраняет неизменной вероятность ложной тревоги без всякой подстройки порога, в то время как корреляционный таким свойством не обладает.

Непараметрические процедуры давно уже разрабатываются в математической статистике применительно к общим задачам обработки статистических массивов при неизвестных распределениях. Известен целый ряд процедур, ставших классическими. В последнее время резко возрос интерес к исследованию возможности использования их в радиотехнических задачах. Главная особенность и основная трудность здесь состоит в том, что результаты нужно получить в «реальном времени», по ходу поступления сигналов или с небольшими задержками.

В традиционных задачах, решаемых методами математической статистики, этой проблемы нет. Многие классические процедуры требуют выполнения большого объема сложных вычислений. Так, например, известны процедуры, в которых статистики вычисляются с использованием рангов\* наблюдаемых отсчетов.

Ранговые процедуры непараметричны в определенных классах распределений и обладают многими интересными чертами. Однако для их применения необходима достаточно трудоемкая операция – ранжирование наблюдаемых данных. В последнее время в связи с использованием быстродействующих ЭЦВМ появилась принципиальная возможность привлечения ранговых процедур для обработки сигналов.

\* В математической статистике понятие «ранг» связано с номером (положением) отсчета в упорядоченной по возрастанию последовательности. Так, например, в исходной выборке (0,8; -0,2; 1;

0,5; -0,6) после упорядочения (-0,6; -0,2; 0,5; 0,8; 1) можно узнать ранг:  $0,8 \rightarrow 4$ ;  $1 \rightarrow 5$ ;  $0,5 \rightarrow 3$ ;  $-0,6 \rightarrow 1$ ;  $-0,2 \rightarrow 2$ .

## Глава 2. РАЗЛИЧЕНИЕ МНОГИХ СИГНАЛОВ

### 2.1. КРИТЕРИЙ МИНИМУМА СРЕДНЕГО РИСКА

Особенность задач, рассматриваемых в настоящей главе, определяется тем фактом, что по информационному каналу может быть передан один из  $M$  сигналов  $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_M$ , причем  $M > 2$ . Как и ранее, наблюдается вектор  $\overline{y}$ . Теперь наблюдатель должен проверить  $M$  гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_M$ . Гипотеза  $H_i$  утверждает, что появление конкретного наблюдаемого  $\overline{y}$  связано с тем, что по каналу передавался сигнал  $\overline{S}_i$ .

Получая вектор  $\overline{y}$ , наблюдатель должен принять одно из  $M$  решений  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M$  в пользу одной из гипотез. Решение выносится в соответствии с некоторым решающим правилом  $\delta$ . Каждое такое правило разбивает все пространство наблюдений на  $M$  областей  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$  и если наблюдаемый вектор  $\overline{y}$  принадлежит области  $\Omega_j$ , то выносится решение  $\gamma_j$ . Как и при различении двух гипотез, можно предложить сколько угодно решающих правил, и чтобы выбрать наилучшее, нужно договориться, что понимать под качеством решения. Качество решающего правила характеризуется средними потерями – потерями, усредненными по всем возможным гипотезам (передаваемым сигналам), по всем возможным принятым решениям при наблюдаемом  $\overline{y}$  и, наконец, по всем возможным выборкам  $\overline{y}$ .

Выражение для средних потерь можно получить так же, как и для случая двух гипотез. Сначала вычислим условные потери  $r_i$ , связанные с принятием решения при условии передачи сигнала  $\overline{S}_i$ . Для этого элементы матрицы потерь следует усреднить по всем возможным принятым решениям

$$r_i = \sum_{j=1}^M \Pi_{ij} P(\gamma_j / H_i), \quad (2.1)$$

где, как и при различении двух гипотез, вероятность  $P(\gamma_j / H_i)$  вынести решение  $\gamma_j$ , когда передается сигнал  $\overline{S}_i$ , определяется соотношением

$$P(\gamma_j / H_i) = \int_{\Omega_j} W(\overline{y} / H_i) d\overline{y}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.2)$$

Теперь, усредняя по всем возможным гипотезам, получим безусловные средние потери – средний риск:

$$R(\delta) = \sum_{i=1}^M P_i r_i = \sum_{i=1}^M P_i \sum_{j=1}^M \Pi_{ij} P(\gamma_j / H_i) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Pi_{ij} P_{ij}, \quad (2.3)$$

где  $P_{ij}$  – совместная вероятность появления событий – передачи сигнала  $\overline{S}_i$  и вынесения решения  $\gamma_j$ .

Для отыскания наилучшего решающего правила  $\delta^*$ , минимизирующего использовать методику раздела 1.1 – замены одной из областей решения, например,  $\Omega_j$ , через оставшиеся.

Более эффективной оказывается следующая методика, использующая запись среднего риска через другой условный риск  $\rho_j(\overline{y})$ , связанный с вынесением решения  $\gamma_j$  при произвольном передаваемом сигнале. Подчеркнем разницу между двумя условными рисками  $r_i$  и  $\rho_j$ . Первый из них  $r_i$  определяется при условии: переданный сигнал фиксирован, а усреднение ведется по всем принятым решениям. Второй вычисляется при другом условии: фиксировано решение  $\gamma_j$ , а усреднение ведется по всем возможным передаваемым сигналам  $\overline{S}_i$ .

Вычислим условный риск  $\rho_j(\overline{y})$  принятия решения при условии, что появится сигнал  $\overline{y}$ , принадлежащий области  $\Omega_j$ . Для этого элементы матрицы потерь взвешиваются с вероятностью  $P(H_i / \overline{y})$  – вероятностями того, что при наблюдаемом сигнале  $\overline{y}$  передавался сигнал  $\overline{S}_i$ :

$$\rho_j(\bar{y}) = \sum_{i=1}^M \Pi_{ij} P(H_i / \bar{y}). \quad (2.4)$$

По формуле Байеса

$$P(H_i / \bar{y}) = \frac{P_i W(\bar{y} / H_i)}{W(\bar{y})}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) видно, что при данном фиксированном  $\bar{y}$  условный риск  $\rho_j(\bar{y})$  зависит только от индекса  $j$ , т. е. от того, к какой из областей  $\Omega_j$  мы отнесем данный  $\bar{y}$ . Поскольку именно эту вариационную задачу мы и собираемся решать, применим один искусственный прием. Запишем условный риск при приеме данной точки  $\bar{y}$  через все условные риски  $\rho_j(\bar{y})$ ,  $j = 1 \dots M$  с помощью некоторой «маркирующей» переменной  $\delta_j(\bar{y})$ :

$$\rho(\bar{y}) = \sum_{j=1}^M \rho_j(\bar{y}) \delta_j(\bar{y}), \quad (2.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta_k(\bar{y}) &= 1 \\ \delta_j(\bar{y}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \bar{y} \in \Omega_k. \quad (2.7)$$

Другими словами, в сумме (2.6) всегда присутствует только одно слагаемое, но какое именно – пока что, до выбора областей, неизвестно. Благодаря такой записи у нас появилась переменная, по которой будет проведена вариация – это индекс  $j$  в маркирующей переменной  $\delta_j(\bar{y})$ . Теперь можно записать аналитически в общем виде выражение для среднего риска:

$$R(\delta) = \int_{\Omega} W(\bar{y}) \sum_{j=1}^M \rho_j(\bar{y}) \delta_j(\bar{y}) d\bar{y}. \quad (2.8)$$

Требуется минимизировать  $R(\delta)$  выбором индекса  $j$  для каждой точки  $\bar{y}$ , входящей в интеграл.

Поскольку подынтегральное выражение в (2.8) неотрицательно, минимум интеграла достигается тогда, когда для каждой точки  $\bar{y}$  будет минимален условный риск  $\rho(\bar{y})$ :

$$\rho(\bar{y}) = \sum_{j=1}^M \rho_j(\bar{y}) \delta_j(\bar{y}) = \min. \quad (2.9)$$

Таким образом, можно сделать очень важный вывод: минимум среднего риска  $R(\delta)$  достигается тогда, когда минимален условный риск  $\rho(\bar{y})$ , связанный с вынесением решения по наблюдаемому сигналу  $\bar{y}$ .

Воспользуемся этим выводом для получения алгоритма наилучшего правила  $\delta^*$ . Как отмечалось выше, при каждом  $\bar{y}$  в сумме остается лишь одно слагаемое  $\rho_k(\bar{y})$ , численно равное условному риску, связанному с вынесением решения  $\gamma_k$ . Поэтому наилучшим будет правило  $\delta^*$ , принимаемое при каждом  $\bar{y}$  такое решение  $\gamma_k$ , для которого условные потери  $\rho_k(\bar{y})$  наименьшие:

$$\rho_k(\bar{y}) = \min_j \rho_j(\bar{y}). \quad (2.10)$$

Таким образом нужно сравнить между собой величины

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(\bar{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^M \Pi_{i1} W(\bar{y} / H_i) P_i}{W(\bar{y})} \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_k(\bar{y}) &= \frac{\sum_{i=1}^M \Pi_{ik} W(\bar{y} / H_i) P_i}{W(\bar{y})} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

и выбирать такое решение  $\gamma_k$  для которого условный риск  $\rho_k(\bar{y})$  меньше всех остальных. Поскольку  $W(\bar{y})$  во всех сравниваемых выражениях одинакова (при данном  $\bar{y}$ ), то ее можно не учитывать.

Условие вынесения решения (2.10) можно представить в следующем часто более удобном для анализа (а не для реализации) виде. Принимается решение  $\gamma_k$ , если

$$\frac{\rho_k(\bar{y})}{\rho_j(\bar{y})} \leq 1, \quad j = 1 \dots M \forall j \neq k \quad (2.12)$$

или, с учетом (2.4) и (2.5), если

$$\frac{\sum_{i=1}^M P_i \Pi_{ik} W(\bar{y} / H_i)}{\sum_{i=1}^M P_i \Pi_{ij} W(\bar{y} / H_i)} \leq 1, \quad j = 1 \dots M \forall j \neq k \quad (2.13)$$

В частности, при различении двух гипотез  $H_0$  и  $H_1$  из (2.13) следует, что условием для вынесения решения  $\gamma_1$  является выполнение неравенства

$$\frac{P_0 \Pi_{01} W(\bar{y} / H_0) + P_1 \Pi_{11} W(\bar{y} / H_1)}{P_0 \Pi_{00} W(\bar{y} / H_0) + P_1 \Pi_{10} W(\bar{y} / H_1)} \leq 1, \quad (2.14)$$

где индексы  $i, j$  принимают значения 0, 1.

Полученное соотношение после преобразования сводится к (1.14,а).

## 2.2. КРИТЕРИЙ МАКСИМАЛЬНОЙ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим частный случай решающего правила, наилучшего по критерию минимума среднего риска, для простой матрицы потерь.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j; \\ 1, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (2.15)$$

подставив (2.15) в (2.3), получим следующее выражение для среднего риска:

$$R(\delta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M {}^{(i)}P_i \int_{\Omega_j} W(\bar{y} / H_i) d\bar{y} = P_{ош}, \quad (2.16)$$

где  $P_{ош}$  - безусловная вероятность ошибочного решения;

$\sum_{j=1}^M {}^{(i)}$  - сумма по всем  $j$  без  $i$ -го элемента.

Само решающее правило получается подстановкой (2.15) в (2.13):

$$\delta_k = 1 \\ \delta_j = 0, \quad j = 1, 2 \dots M, \quad \forall j \neq k,$$

если

$$\frac{\sum_{i=1}^M {}^{(k)}P_i W(\bar{y} / H_i)}{\sum_{i=1}^M {}^{(j)}P_i W(\bar{y} / H_i)} \leq 1, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots M; \\ j \neq k. \end{matrix}$$

Несложными преобразованиями последнее соотношение сводится к виду

$$\frac{P_k W(\bar{y} / H_k)}{P_j W(\bar{y} / H_j)} \geq 1, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \dots M; \\ j \neq k. \end{matrix} \quad (2.17)$$

Полученное решающее правило соответствует критерию идеального наблюдателя. Оно же с учетом

$$\frac{P_k W(\bar{y} / H_k)}{P_j W(\bar{y} / H_j)} = \frac{P(H_k / \bar{y})}{P(H_j / \bar{y})} \quad (2.18)$$

является наилучшим решающим правилом по критерию максимума апостериорной вероятности.

Следует подчеркнуть, что решающее правило (2.17) отличается от аналогичного решающего правила различения двух гипотез только тем, что приходится проверять выполнение не одного, а  $(M - 1)$  однотипных неравенств.

Рассмотрим второй частный случай оптимального байесовского правила различения  $M$  гипотез, вводя дополнительное к (2.15) условие

$$P_k = P = \frac{1}{M}. \quad (2.19)$$

Подставив (2.15) и (2.19), получим решающее правило:

$$\frac{W(\bar{y} / H_k)}{W(\bar{y} / H_j)} \geq 1, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, M; \\ j \neq k. \end{matrix} \quad (2.20)$$

Как и ранее, его будем называть наилучшим решающим правилом по критерию максимального правдоподобия.

Использование решающих правил (2.17) и (2.20) проиллюстрируем примером передачи по информационному каналу одного из  $M$  сигналов  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_M$ , заданных в виде совокупностей отсчетов  $(S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1n}), (S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2n}), \dots, (S_{M1}, S_{M2}, \dots, S_{Mn})$ .

В канале связи передаваемый сигнал искажается аддитивным, белым, стационарным нормальным шумом с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Для различения воспользуемся решающим правилом, наилучшим по критерию идеального наблюдателя (2.17). Левая часть этого неравенства в данном случае имеет вид

$$\frac{P_k W(\bar{y} / H_k)}{P_j W(\bar{y} / H_j)} = \frac{P_k}{P_j} \prod_{p=1}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(y_p - S_{kp})^2 - \right. \\ \left. - \sigma^2 \ln \frac{P_k}{P_j}], \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M; \\ j \neq k. \end{matrix} \quad (2.22)$$

Если для  $k$ -го сигнала при данном  $\bar{y}$  все  $(M - 1)$  неравенств выполняются, то принимается решение  $\gamma_k$ . При невыполнении хотя бы одного неравенства необходимо взять новое значение  $k$  и проверить все  $(M - 1)$  неравенства. Последнее слагаемое в системе неравенств (2.22) зависит от априорных вероятностей. Если они равны, то это слагаемое будет равно нулю. Это и будет решающее правило алгоритма различения сигналов, оптимального по критерию максимального правдоподобия.

### 2.3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМОВ РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

в процессе принятия решения любой из рассмотренных ранее алгоритмов различения  $M$  сигналов сводится к процедуре анализа системы из  $(M - 1)$ -го неравенства. Принятое решение может быть как правильным, так и ошибочным. Для характеристики свойств алгоритма важно знать вероятности этих двух ситуаций.

На примере алгоритма различения сигналов, работающего в соответствии с критерием максимального правдоподобия, рассмотрим основные принципы решения вопроса об определении значений вероятности правильного и ошибочного решений. Как следует из соотношения (2.20), определяющего решающее правило критерия максимального правдоподобия, в этом случае при принятии решения необходимо из всех значений функции правдоподобия  $L(\bar{y})$  выбрать максимальное (рис. 2.2). Номер гипотезы, соответствующий максимальному значению функции правдоподобия, и определяет номер принимаемого решения.

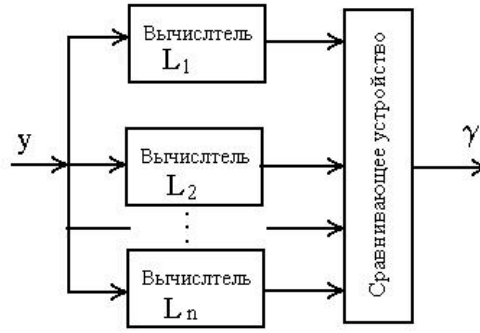


Рис. 2.2. Принятие решения по критерию максимального правдоподобия

Если, например, принято решение  $\gamma_k$ , то вероятность того, что это решение правильно  $P_{np}(H_k)$ , определится вероятностью совершения события, состоящего в одновременном выполнении всех неравенств,

$$L_j < L_k,$$

где  $j$  принимает все значения от 1 до  $M$ , кроме  $j = k$ .

Другими словами,

$$P_{np}(H_k) = P\{L_1 < L_k, L_2 < L_k, \dots, L_M < L_k / H_k\}. \quad (2.23)$$

В свою очередь, вероятность ошибочного принятия решения

$$P_{ош}(H_k) = 1 - P_{np}(H_k). \quad (2.24)$$

И, наконец, безусловная вероятность ошибочного вынесения решения получается усреднением  $P_{ош}(H_k)$  по всем возможным гипотезам

$$P_{ош} = \sum_{k=1}^M P_k P_{ош}(H_k). \quad (2.25)$$

Из (2.23) следует, что для вычисления вероятности ошибочного различения необходимо знать совместный закон распределения  $W(L_1, L_2, \dots, L_M / H_k)$  всех функций правдоподобия при условии, что верна  $H_k$ -я гипотеза. Действительно, тогда

$$P_{ош}(H_k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dL_k \int_{-\infty}^{L_k} \dots \int_{-\infty}^{L_k} W(L_1, L_2, \dots, L_M / H_k) dL_1 dL_2 \dots dL_M, \quad j \neq k. \quad (2.26)$$

Следует сразу отметить, что даже в сравнительно простых случаях трудно записать совместный закон распределения  $W(L_1, L_2, \dots, L_M / H_k)$ . Но даже если этот закон найден, в большинстве случаев не удастся вычислить аналитически  $P_{ош}(H_k)$ , и приходится либо численно интегрировать (2.26), либо применять приближенные вычисления.

Особенности вычисления вероятности ошибочного различения проиллюстрируем примером вычисления  $P_{ош}$  при различении  $M$  сигналов в присутствии аддитивных гауссовских помех с параметрами  $(0, \sigma^2)$ . Решающее правило в этом случае определяется соотношением (2.22).

Принимается решение  $\gamma_k$ , если одновременно выполняется  $(M - 1)$  неравенств

$$\sum_{p=1}^n y_p (S_{kp} - S_{jp}) \geq -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{jp}^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{kp}^2 - \sigma^2 \ln \frac{P_k}{P_j}, \quad \begin{matrix} j = 1 \dots M; \\ j \neq k \end{matrix}$$

т. е. здесь мы уже перешли от сравнения функций правдоподобия  $L_1 L_2 \dots L_M$  к эквивалентному сравнению достаточных статистик

$$\psi_i = \sum_{p=1}^n y_p S_{ip}. \quad (2.27)$$

В этих обозначениях решающее правило принимает вид

$$\psi_k \geq \psi_j - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n S_{kp}^2 - \sigma^2 \ln \frac{P_k}{P_j}, \quad \forall j \neq k. \quad (2.29)$$

где  $\mathcal{E}$  - энергия сигнала;

$F$  – максимальная частота спектра сигнала.

Теперь принимается решение  $\gamma_k$ , если достаточная статистика  $\psi_k$  превосходит все остальные статистики:

$$\psi_k \geq \psi_j, \quad \forall j \neq k. \quad (2.30)$$

Поскольку мы от функций правдоподобия перешли к достаточным статистикам, для вычисления правильного или ошибочного принятия  $k$ -й гипотезы надо знать совместный условный закон распределения достаточных статистик  $W[\psi_1, \psi_2 \dots \psi_M / H_k]$ . Из (2.27) следует, что если помеха аддитивна и нормальна, то любая из  $\psi_i$  имеет нормальный закон распределения. Но поскольку все статистики зависят от одних и тех же случайных величин  $y_1 y_2 \dots y_n$ , то значит в общем случае они зависимы. Вычислим среднее значение, дисперсию и коэффициенты корреляции статистик в предположении, что верна  $k$ -я гипотеза, т. е.

$$y_p = S_{kp} + \xi_p. \quad (2.31)$$

Подставив (2.31) в (2.27) и проведя усреднение по  $\xi$ , получим:

$$\langle \psi_i \rangle = \left\langle \sum_{p=1}^n (S_{kp} + \xi_p) S_{ip} \right\rangle = \sum_{p=1}^n S_{kp} S_{ip}, \quad (2.32)$$

т. е. среднее значение статистики  $\psi_i$ , в предположении, что верна  $k$ -я гипотеза, пропорционально взаимной корреляции сигналов  $\bar{S}_i$  и  $\bar{S}_k$ .

Вычислим условную дисперсию статистики  $\psi_i$ . По определению,

$$D_{\psi_i} = \langle [\psi_i - \langle \psi_i \rangle]^2 \rangle = \left\langle \left[ \sum_{p=1}^n \xi_p S_{ip} \right]^2 \right\rangle = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \langle \xi_p \xi_q \rangle S_{ip} S_{iq}.$$

Поскольку полагаем, что отсчеты помехи независимы,

$$D_{\psi_i} = \sum_{p=1}^n \langle \xi_p^2 \rangle S_{ip}^2 = \sigma^2 2F\mathcal{E}, \quad (2.33)$$

т. е. дисперсии всех статистик одинаковы. Аналогично коэффициент корреляции статистик  $\psi_i$  и  $\psi_j$

$$\begin{aligned} k &= \frac{\langle (\psi_i - \langle \psi_i \rangle)(\psi_j - \langle \psi_j \rangle) \rangle}{\sigma^2 2F\mathcal{E}} = \frac{\left\langle \sum_{p=1}^n \xi_p S_{ip} \sum_{q=1}^n \xi_q S_{jq} \right\rangle}{\sigma^2 2F\mathcal{E}} = \\ &= \frac{\sum_{p=1}^n \langle \xi_p^2 \rangle S_{ip} S_{jp}}{2\sigma^2 F\mathcal{E}} = \frac{\sum_{p=1}^n S_{ip} S_{jp}}{2F\mathcal{E}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Таким образом, коэффициенты корреляции статистик  $\psi_i$  и  $\psi_j$  определяются коэффициентом корреляции соответствующих различаемых сигналов  $\bar{S}_i$  и  $\bar{S}_j$ .

Введем упрощающее предположение: различаемые сигналы – ортогональны, т. е.

$$\frac{\sum_{p=1}^n S_{ip} S_{jp}}{2F\mathcal{E}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (2.35)$$

В этом случае достаточные статистики некоррелированы, а значит, и независимы, так как они нормально распределены. А условные средние значения и дисперсии определяются соотношениями (в предположении, что верна гипотеза  $H_k$ )

$$\langle \psi_i \rangle = \begin{cases} 2F\mathcal{E}, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (2.36)$$



$$D_{\psi_i} = 2\sigma^2 F\mathfrak{E}. \quad (2.37)$$

Теперь можно записать условный закон распределения:

$$\begin{aligned} W(\psi_1, \psi_2 \dots \psi_M / H_k) &= \prod_{i=1}^M W(\psi_i / H_k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{2F\mathfrak{E}}} e^{-\frac{(\psi_k - 2F\mathfrak{E})^2}{2\sigma^2 2F\mathfrak{E}}} \times \\ &\times \prod_{j=k}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{2F\mathfrak{E}}} e^{-\frac{\psi_j^2}{2\sigma^2 2F\mathfrak{E}}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Поскольку условные  $\langle \psi_i \rangle$  и  $D_{\psi_i}$  не зависят от номера проверяемой гипотезы  $H_k$ , то и условный закон  $W(\psi_1, \psi_2 \dots \psi_M / H_k)$  в наших предположениях не зависит от  $k$ . Значит,  $P_{ош}$  не зависит от индекса  $k$  и общая безусловная вероятность ошибочного различения (2.25)

$$\begin{aligned} P_{ош} &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{2F\mathfrak{E}}} e^{-\frac{(\psi_k - 2F\mathfrak{E})^2}{2\sigma^2 2F\mathfrak{E}}} \times \\ &\times \left[ \int_{-\infty}^{\psi_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{2F\mathfrak{E}}} e^{-\frac{\psi_i^2}{2\sigma^2 2F\mathfrak{E}}} d\psi_i \right]^{M-1} d\psi_k. \end{aligned} \quad (2.39)$$

К сожалению, даже в этом случае нельзя выполнить интегрирование (2.39) в аналитическом виде. Результаты численного интегрирования приведены в [2] и представлены графически на рис. 2.3.

Однако можно получить приближенные выражения для оценки величины  $P_{ош}$ . Один из возможных путей, рассмотренный в [2], состоит в следующем. Превышение любого  $\psi_i$  над  $\psi_k$  приведет к ошибочному решению. Но так как  $\psi_k$  может быть превышено не одним  $\psi_j$ , а сразу многими, то

$$P_{ош} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M P(\psi_j > \psi_k). \quad (2.40)$$

Поскольку все  $\psi_j$  имеют одинаковое распределение плотности вероятности, то

$$\begin{aligned} P_{ош} &\leq (N-1)P(\psi_j > \psi_k) = \\ &= (N-1) \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_k / H_k) \int_{\psi_k}^{\infty} W(\psi_j / H_k) d\psi_j d\psi_k, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$j$  - одно конкретное значение из всех  $M$ , кроме  $j = k$ .

Выражение (2.41) проинтегрировать значительно проще, поскольку внутренний интеграл – это знакомое уже соотношение, определяющее вероятность ошибочного решения в задаче проверки двух гипотез [см. раздел 1.2, соотношение (1.36)].

Соотношение (2.41) определяет верхнюю границу значений вероятности ошибочного решения при различении  $M$  ортогональных сигналов в аддитивном гауссовом белом шуме.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. «Советское радио», 1968.
2. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. «Советское радио», 1972.
3. Теоретические основы радиолокации. Под редакцией Я. Д. Ширмана «Советское радио», 1970.
4. Вальд А. Последовательный анализ. Физматгиз, 1960.